

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA
ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

SEPTIEMBRE 1938. — ENTREGA III. — TOMO CXXVI

SUMARIO

Pág.

MATEMATICAS:

JUAN CARLOS VIGNAUX. — Sobre la transformada de Beltrami-Poincaré
y la generalización de la fórmula de Riemann 161

FISICA:

ADOLFO T. WILLIAMS. — Tabla de las últimas líneas. (Conclusión).... 188

CIENCIAS NATURALES:

GUSTAVO A. FESTER. — La Cordillera Payne 215

CARLOS A. RUSCONI. — Sobre varios restos de osos de la fauna enseña-
dense 227

C. C. D. y E. R. — Bibliografía 238

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
 Dr. Mario Isola †
 Dr. Germán Burmeister †
 Dr. Benjamín A. Gould †
 Dr. R. A. Phillippi †
 Dr. Guillermo Rawson †
 Dr. Carlos Berg †
 Dr. Valentín Balbín †
 Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
 Dr. César Lombroso †
 Ing. Luis A. Huerco †
 Ing. Vicente Castro †
 Dr. Juan J. J. Kyle †
 Dr. Estandislao S. Zeballos †
 Ing. Santiago E. Barabino †
 Dr. Carlos Spegazzini †
 Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
 Ing. Eduardo Huerco †
 Ing. Guillermo Marconi †
 Dr. Walter Nernst
 Dr. Eduardo L. Holmberg †
 Dr. Alberto Einstein
 Dr. Angel Gallardo †
 Dr. Cristóbal M. Hicken †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich;
 Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Diculefalt; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo
 A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.);
 Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emi-
 liano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo
 R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo
 Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappl.

JUNTA DIRECTIVA

(1938-1939)

<i>Presidente</i>	Ingeniero Jorge W. Dobranich
<i>Vicepresidente 1º</i>	Doctor Ramón G. Loyarte
<i>Vicepresidente 2º</i>	Doctor Gonzalo Bosch
<i>Secretario de actas</i>	Ingeniero Raúl E. Dubecq
<i>Secretario de correspondencia</i> ..	Doctor Santiago Barabino Amadeo
<i>Tesorero</i>	Ingeniero Edmundo Parodi
<i>Pro-tesorero</i>	Profesor José F. Molino
<i>Bibliotecario</i>	Ingeniero Carlos A. Lizer y Trelles
	Doctor Claro C. Dassen
	Doctor Alfredo Sordelli
	Doctor Juan C. Vignaux
	Doctor Jorge Magnin
<i>Vocales</i>	Doctor Juan Ubaldo Carrea
	Doctor Reinaldo Vanossi
	Ingeniero Carlos Posadas
	Ingeniero Mario L. Negri

ADVERTENCIA.— Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus articulos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

SOBRE LA TRANSFORMADA DE BELTRAMI-POINCARÉ Y LA GENERALIZACION DE LA FORMULA DE RIEMANN

POR J. C. VIGNAUX

INTRODUCCIÓN. — La célebre integral doble

$$\iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} dw \quad [1]$$

en la cual v es la variable de integración, fué considerada por primera vez, e independientemente, por E. Beltrami ⁽¹⁾ y por H. Poincaré ⁽²⁾.

M. Pompeiu ⁽³⁾, ha dado utilizando una integral doble de la forma [1], el primer ejemplo de una función analítica, continua en el conjunto de sus puntos singulares, y M. Denjoy ⁽⁴⁾ ha demostrado rigurosamente la existencia de funciones analíticas univocas y continuas sobre todo el plano por la consideración de la integral doble

$$\iint_E \frac{d\omega}{v-z}$$

Recientemente W. Fédoroff ⁽⁵⁾ ha probado que no puede existir para cada función analítica unívoca y continua en todo el plano, una representación analítica en la forma de integral doble [1] válida en todo el dominio $\Omega-D$; y además ha propuesto la representación de

(1) *Sulle funzioni complesse*, Rend. Ist. Lombardo, V. XX (1887).

(2) *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, American Journal of Mathematics. V. XIV (1892, p. 209).

(3) *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Comp. Rendus, 1904, p. 914.

(4) *Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinue de singularités* (Comp. Rendus. 1909, p. 1154; L. ZORRETTI, *Leçons sur le prolongement analytique*, París, 1911, p. 86.

(5) *Bulletin. Acad. Polonaise* (1927-28).

una función analítica dada $f(z)$ mediante una serie de integrales

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_E \frac{\varphi_n(v)}{v-z} dw.$$

La consideración de una integral doble de aquel tipo ha permitido crear la notable teoría de las *funciones no-monógenas* debido a M. Pompeiu ⁽¹⁾, la cual ha dado lugar recientemente a importantes trabajos en su aspecto analítico y geométrico de Calugareano, Theodoresco, Kasner y varios otros.

M. Borel ⁽²⁾ ha considerado una integral doble análoga a la [1], pero extendida a todo el plano, para definir sus célebres *funciones monógenas generalizadas* no analíticas en el sentido de Cauchy.

La función, definida por la integral

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega \quad [2]$$

es *continua y uniforme en todo el plano*.

M. Pompeiu ha probado esta propiedad, aun para el caso general en que la función $\varphi(v)$ dada, sea solamente acotada e integrable Lebesgue.

En los puntos z exteriores al dominio D la $f(z)$ es función *holomorfa*, mientras que en los puntos interiores ella es *holomorfa* $[\alpha]$ ⁽³⁾ (*polígena*) y su *derivada areolar* es igual a $\varphi(v)$ en el dominio D .

A su vez, M. Theodoresco ⁽⁴⁾ generalizando los resultados de M. Pompeiu, ha probado que la función

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

donde $\varphi(v)$ es continua en el dominio cerrado y satisface a una con-

⁽¹⁾ *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912, p. 108; 1913, p. 277.

⁽²⁾ E. BOREL, *Sur le théorème du potentiel logarithmique*, Comp. Rendus. Ac. d. Sc. 154 (1912; *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes*, París (1917). Véase también sobre este particular los importantes trabajos de G. JULIA; y la interesante nota de R. CACCIOPOLI, *Integrales doubles de Cauchy et fonctions monogènes généralisées*, C. Rendus, t. 198, p. 2227.

⁽³⁾ POMPEIU, *Annaes de Academia Polytechnica do Porto*, t. III, 1913; *Bulletin de l'Academia Roumaine*, t. III (1914-15) (cuatro notas).

⁽⁴⁾ THEODORESCO, Thésis, París, 1931.

dición de Hölder de orden $\alpha > 0$, admite derivadas parciales continuas con respecto a ξ y η ($z = \xi + i\eta$) en cada punto del dominio abierto D y estas derivadas satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \xi} + i \frac{\partial f(z)}{\partial \eta} = 2 \varphi(z).$$

La expresión [2] establece por tanto una cierta correspondencia funcional entre una función $\varphi(v)$ de un dominio D y una función $f(z)$ compleja de la variable compleja z definida en todo el plano, cuyas propiedades se trata de investigar.

Desde otro punto de vista, la [2] se puede considerar también como una cierta correspondencia entre una familia infinita de funciones $\varphi(v)$ dadas en un dominio común D , y la nueva familia formada por sus transformadas.

En la presente memoria nos proponemos abordar el estudio de la transformada [2] considerándola en el doble aspecto antes señalado.

Además propongo una generalización de la fórmula de inversión de Riemann.

2. *Definiciones.* — Dada una función $\varphi(v)$ acotada e integrable Lebesgue ⁽¹⁾ en un dominio cerrado y finito D , la integral doble

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} d\omega, \quad (v = \xi + i\eta, \quad d\omega = d\xi \cdot d\eta)$$

define en todo el plano de la variable compleja: $z = x + iy$, una función compleja $f(z)$ de z , uniforme y continua que llamaré la transformada de Beltrami-Poincaré de la función $\varphi(z)$ o simplemente transformada (B-P). A las funciones $\varphi(z)$ y $f(z)$ las denominaremos respectivamente función generatriz (B-P) y función determinante (B-P). La transformación (B-P) es una operación funcional distributiva.

Cuando la variable z pertenece a la región exterior del dominio D la función es holomorfa ⁽²⁾. En efecto; sea z_0 un punto cualquiera

⁽¹⁾ H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, París (1928).

⁽²⁾ M. POMPEIU y THEODORESCO prueban esta propiedad, aplicando a la función $f(z)$ el teorema de MORERA. La demostración que aquí propongo, además de ser más simple, nos permite dar un desarrollo tayloriano de $f(z)$ en un entorno de todo punto exterior a D y su prolongación analítica (en el sentido de MERAY-WEIERSTRASS) en toda la región exterior.

exterior a D ; y escribamos el núcleo $\frac{1}{v-z}$ en la forma siguiente

$$\frac{1}{v-z} = \frac{1}{v-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{v-z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{v-z_0}} \right)$$

o bien

$$\frac{1}{v-z} = \frac{1}{v-z_0} + \frac{(z-z_0)}{(v-z_0)^2} + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{(v-z_0)^{n+1}} + \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(v-z)(v-z_0)^{n+1}}$$

Sustituyendo esta expresión en la integral

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

se tiene

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + C_n$$

donde los coeficientes tienen por expresión

$$a_n = -n! \iint_D \frac{\varphi(v)}{(v-z_0)^{n+1}} d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y el término complementario

$$C_n = - \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} \left(\frac{z-z_0}{v-z_0} \right)^{n+1} d\omega$$

Vamos a probar que C_n tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Sea M un límite superior del módulo de $\varphi(v)$ en todo el dominio D , y pongamos

$$\min |v-z_0| = \delta \neq 0$$

cuando v recorre el dominio cerrado D . Consideremos ahora el círculo de centro z_0 y radio $R < \delta$, el cual será por tanto completamente exterior a D ; y pongamos

$$|z-z_0| = r$$

para todo punto z de dicho círculo. Se tiene

$$|v-z| > \delta - r$$

luego resulta

$$\left| \frac{1}{v-z} \right| < \frac{1}{\delta - r}$$

para todo z situado en el círculo y todo v interior a D ; por tanto

$$|C_n| \leq \frac{M \cdot S}{\delta - r} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \quad \left(S = \iint_D d\omega\right)$$

y el factor $\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$ tiende hacia cero, cuando n aumenta indefinidamente. Resulta de aquí que, $f(z)$ es igual a la suma de la serie de potencia convergente

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

en el círculo de radio $R < \delta \neq 0$.

Luego, la función $f(z)$ es holomorfa en todo punto del plano completamente exterior al dominio D .

Las derivadas sucesivas de $f(z)$ en un punto cualquiera z exterior al dominio D , viene dada por la expresión

$$f^{(n)}(z) = n! \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

En efecto; sea z un punto fijo y Δz un incremento de z tal que z y $z + \Delta z$ sean puntos exteriores al dominio D . Se tiene

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z} d\omega, \quad f(z + \Delta z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z - \Delta z} d\omega$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z)(v - z - \Delta z)} \\ &= \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z)} + \iint_D \frac{\varphi(v) - \Delta z}{(v - z)^2 \cdot (v - z - \Delta z)} d\omega \end{aligned}$$

La última integral del segundo miembro tiende a cero al mismo tiempo que $|\Delta z| \rightarrow 0$.

En efecto; si hacemos

$$v - z = \rho e^{i\theta}, \quad d\omega = \rho d\rho d\theta$$

es

$$|v - z| = \rho$$

luego el módulo de dicha integral es inferior a

$$\frac{MS}{\rho^3} |\Delta z| < \frac{MS}{\delta^3} |\Delta z|$$

donde M es el límite superior de $|\varphi(v)|$, mín $|v - z| = \delta \neq 0$ cuando v recorre D , y S representa el área de D . Pasando al límite para $|\Delta z| \rightarrow 0$, se tiene

$$f'(z) = \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z)^2}.$$

Del mismo modo se prueba que

$$f''(z) = 1.2 \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z)^3}, \quad f'''(z) = 1.2.3 \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z)^4}$$

y en general, por recurrencia resulta la [1].

Por tanto, las derivadas sucesivas de la función holomorfa $f(z)$, en los puntos exteriores a D , se obtienen derivando bajo el signo de la integral doble [1] respecto a la variable z .

Según esto, el desarrollo de Taylor de la $f(z)$ toma la forma

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)$$

donde

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \iint_D \frac{\varphi(v) d\omega}{(v - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

En particular, si el origen de coordenadas es completamente exterior al dominio D , resulta

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

donde

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v^{n+1}} d\omega$$

y este desarrollo es convergente en el círculo de centro en el origen y radio igual al extremo inferior de las distancias del centro a los puntos del contorno de D .

3. — Vamos a demostrar la importante propiedad siguiente:

Si la función $\varphi(v)$ tiene por transformada (B-P) a $f(z)$, la $v\varphi(v)$ tiene por transformada (B-P) a $zf(z)$, a menos de un polinomio aditivo.

Sea

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

y

$$g(z) = \iint_D \frac{v\varphi(v)}{v-z} d\omega.$$

Puesto que

$$\frac{v}{v-z} = 1 + \frac{z}{v-z}$$

resulta entonces

$$g(z) = \iint_D \varphi(v) d\omega + z \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

es decir

$$zf(z) = \iint_D \frac{v\varphi(v)}{v-z} d\omega + C$$

Del mismo modo, se tiene

$$z^2 f(z) = \iint_D \frac{v^2 \varphi(v)}{v-z} d\omega + Cz + C_1$$

y en general

$$z^n f(z) = \iint_D \frac{v^n \varphi(v)}{v-z} d\omega + A_n(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

4. *Operaciones fundamentales.* — Vamos a probar las proposiciones siguientes relativas a la suma y al producto de dos transformaciones (B-P).

Consideremos las dos transformaciones de Beltrami-Poincaré.

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} d\omega \quad [1]$$

$$g(z) = \iint_D \frac{\psi(v)}{z-v} d\omega \quad [2]$$

definidas en el mismo dominio D .

Puesto que es

$$f(z) + g(z) = \iint_D \frac{\theta(v)}{z-v} d\omega$$

donde

$$\theta(z) = \varphi(z) + \psi(z)$$

es también función acotada e integrable (L); resulta entonces:

La suma (diferencia) de dos transformadas (B-P) es una transformada (B-P), cuya generatriz (B-P) es la suma (diferencia) de las generatrices (B-P) de las primeras.

Probaremos ahora que el producto de dos transformadas (B-P) es una transformada (B-P).

En efecto; multiplicando las integrales dobles

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} dv \quad [1]$$

$$g(z) = \iint_D \frac{\psi(u)}{z-u} du \quad [2]$$

resulta

$$\begin{aligned} f(z) \cdot g(z) &= \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} dv \cdot \iint_D \frac{\psi(u)}{z-u} du = \\ &= \iint_D dv \iint_D \frac{\varphi(v) \psi(u)}{(z-v)(z-u)} du. \end{aligned} \quad [3]$$

El núcleo de esta última integral, se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{(z-v)(z-u)} = \frac{1}{v-u} \left(\frac{1}{z-v} - \frac{1}{z-u} \right)$$

y sustituyendo en la relación [3] resulta

$$f(z) g(z) = J_1(z) + J_2(z)$$

habiendo puesto

$$J_1(z) = \iint_D dv \iint_D \frac{\varphi(v) \psi(u)}{(v-u)(z-v)} du$$

$$J_2(z) = \iint_D du \iint_D \frac{-\varphi(v) \psi(u)}{(v-u)(z-u)} dv$$

Por otra parte, las integrales $J_1(z)$ y $J_2(z)$ se pueden escribir en la forma siguiente:

$$J_1(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} \left[\iint_D \frac{\psi(u)}{v-u} du \right] dv = \iint_D \frac{\varphi(v) A(v)}{z-v} dv \quad [4]$$

donde

$$A(v) = \iint_D \frac{\psi(u)}{v-u} du$$

es una integral doble de Beltrami-Poincaré de parámetro v .

Del mismo modo, se tiene

$$J_2(z) = \iint_D \frac{\psi(u)}{z-u} \left[\iint_D \frac{-\varphi(v)}{v-u} dv \right] du = \iint_D \frac{\psi(u) \cdot B(u)}{z-u} du \quad [5]$$

donde

$$B(u) = \iint_D \frac{-\varphi(v)}{v-u} dv$$

Teniendo en cuenta las igualdades [4] y [5], la igualdad [3] resulta

$$\begin{aligned} f(z) \cdot g(z) &= \iint_D \frac{\varphi(v) A(v)}{z-v} dv + \iint_D \frac{-\psi(u) B(u)}{z-u} du = \\ &= \iint_D \frac{\varphi(v) A(v) + \psi(v) B(v)}{z-v} dv \end{aligned} \quad [6]$$

La función

$$\theta(z) = \varphi(z) A(z) + \psi(z) B(z)$$

es acotada e integrable Lebesgue en el dominio (D) y por tanto la integral doble

$$\iint_D \frac{\theta(v)}{z-v} dv$$

es una integral de Beltrami-Poincaré y se tiene, según [6]

$$f(z) \cdot g(z) = \iint_D \frac{\theta(v)}{z-v} dv.$$

Luego: el producto de dos transformadas $(B-P)$ es una transformada $(B-P)$, que tiene como determinante $(B-P)$, el producto de las

determinante (B-P) de sus factores y cuya generatriz $\theta(v)$ está dada por la relación [2] ⁽¹⁾.

5. — La integral doble de Beltrami-Poincaré se puede transformar en una integral simple de Laplace como sigue:

Sea

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} d\omega$$

y pongamos

$$\max R(v) = \sigma$$

cuando el punto v recorre el dominio cerrado D . Para todo z tal que $R(z) > \sigma$; se tiene

$$\frac{1}{z-v} = \int_0^\infty e^{-t(z-v)} dt \quad (t \geq 0)$$

puesto que en tal hipótesis, resulta

$$R(z-v) = x - \xi > 0$$

y la integral [2] converge en dicho semiplano.

La [1] resulta entonces

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} d\omega = \iint_D \varphi(v) d\omega \int_0^\infty e^{-tz+tv} dt = \int_0^\infty e^{-tz} dt \iint_D \varphi(v) e^{tv} d\omega$$

puesto que en este caso la permutación de la integración es legítima ⁽¹⁾, desde que fijado z en el semiplano $R(z) > \sigma$, y v en D , la integral [2] converge uniformemente.

⁽¹⁾ La función $\theta(z)$ juega aquí el mismo rol que la función

$$H(x) = \int_0^x F(t) G(t-x) dt = F \times G$$

en el producto formal de dos integrales

$$\int_0^\infty F(t) dt \quad \text{y} \quad \int_0^\infty G(t) dt.$$

G. DOETSCH llama a la función $H(x)$ «*Faltungsfunktion*» y prueba su existencia. (*Die Integrodifferentialgleichungen von Faltungs typus Math. Annalen*, 89, (1923) p. 194, § 1. Ella interviene en cuestiones fundamentales, como ser en la teoría de la composición y de las funciones permutables de Volterra; producto de series sumables (B), etc.

⁽¹⁾ Véase: S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, p. 446. El teorema ha sido demostrado para el caso de la integral definida simple; su extensión a las dobles no ofrece dificultad.

Finalmente, si ponemos

$$\psi(t) = \iint_D \varphi(v) e^{vt} d\omega \quad [3]$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-iz} \psi(t) dt \quad R(z) > \sigma$$

integral de Laplace de camino real y cuya *generatriz* de Laplace $\psi(t)$ viene dada por la relación [3] en función de la generatriz $\varphi(v)$ de Beltrami.

Por tanto: *Toda función $f(z)$ determinante (B - P) es función determinante (L) cuya generatriz (L) $\psi(t)$, está dada por la [3] en función de la generatriz (B - P) $\varphi(v)$.*

La integral doble

$$\psi(t) = \iint_D \varphi(v) e^{vt} d\omega$$

define una nueva correspondencia funcional entre la generatriz de Beltrami $\varphi(v)$ y la función $\psi(t)$ de la variable real t , que llamaremos la resultante (B) de la $\psi(v)$.

La $\psi(t)$ admite las derivadas de todos los órdenes.

$$\psi'(t) = \iint_D \varphi(v) \cdot v e^{vt} d\omega, \quad \psi''(t) = \iint_D \varphi(v) v^2 e^{vt} d\omega$$

y en general se tiene

$$\psi^{(n)}(t) = \iint_D \varphi(v) v^n e^{vt} d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

desde que es legítima la derivación respecto de t bajo signo integral.

La $\psi(t)$, es además una función entera de t . En efecto, se tiene

$$e^{vt} = \sum_0^\infty \frac{(vt)^n}{n!}$$

para todo t real y todo v de D .

Luego

$$\begin{aligned}\iint_D \varphi(v) e^{vt} d\omega &= \iint_D \varphi(v) \left(\sum_0^\infty \frac{(vt)^n}{n!} \right) d\omega \\ &= \sum_0^\infty \iint_D \frac{v^n t^n}{n!} \varphi(v) d\omega \\ &= \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} \iint_D v^n \varphi(v) d\omega\end{aligned}$$

por ser legítima la integración término a término.

Si ponemos

$$a_n = \frac{1}{n!} \iint_D v^n \varphi(v) d\omega = \psi^{(n)}(0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

resulta

$$\psi(t) = \sum_0^\infty a_n t^n$$

Además, puesto que

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!} \iint_D |v|^n |\varphi(v)| d\omega \leq \frac{\lambda^n}{n!} MS$$

donde

$$|v| \leq \lambda, \quad |\varphi(v)| < M, \quad S = \iint_D d\omega$$

luego el radio de convergencia de la serie $\psi(t)$ según la fórmula de Cauchy-Hadamard es

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Recíprocamente, si la generatriz $(L) \psi(t)$, de una integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \psi(t) dt$$

es la resultante $(B \cdot P)$ con generatriz $(B \cdot P)$ igual a $\varphi(v)$, se tiene entonces

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} d\omega$$

en el dominio antes definido, puesto que es legítimo efectuar las operaciones en sentido inverso.

Conviene señalar que mientras la transformada (*B-P*) representa a una función holomorfa $f(z)$ en todos los puntos exteriores al dominio D , la transformada (*L*) sólo representa la dicha función en un semi-plano $R(z) > \sigma$ cuya abscisa de convergencia σ está determinada por la relación.

$$\max R(v) = \sigma.$$

Estos resultados se pueden generalizar, adoptando para la integral de Laplace caminos complejos rectilíneos ⁽¹⁾.

6. — El desarrollo en serie de potencia de $\frac{1}{z}$, de una función determinante (*B-P*)

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} d\omega$$

se deduce como sigue. Sea z un punto cualquiera exterior a D ; se tiene la identidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-v} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{z}\right)} = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{v}{z^2} + \dots + \frac{v^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} \frac{v^{n+1}}{z-v} \end{aligned}$$

cuando v recorre el dominio cerrado D

Por tanto, la integral doble anterior se puede escribir

$$f(z) = \iint_D \varphi(v) \left(\sum_{i=0}^n \frac{v^i}{z^{i+1}} \right) d\omega + \frac{1}{z^{n+1}} \iint_D v^{n+1} \varphi(v) d\omega$$

es decir

$$f(z) = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{z^{i+1}} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}$$

donde

$$\begin{aligned} c_i &= \iint_D v^i \varphi(v) d\omega, \\ \varepsilon_n(z) &= \iint_D v^{n+1} \varphi(v) d\omega \end{aligned}$$

⁽¹⁾ La consideración de caminos complejos para la integral de LAPLACE (rectilíneos o no) se remonta a los trabajos ya clásicos y bien conocidos de S. PINCHERLE. *Sur les fonctions determinantes*, Annales Scientifiques de l'école normale supérieure (1905) y *Acta Math* (1907).

Sea R el extremo superior de $|v|$ en D . Si

$$|z| > R$$

el punto z es exterior al círculo de centro en el origen y radio R finito; en tal caso resulta

$$|\varepsilon_n(z)| < R^{n+1} \cdot M S$$

donde S es el área del dominio D y $|\varphi(v)| \leq M$; luego el módulo del resto de la serie

$$\left| \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \left(\frac{R}{z} \right)^{n+1} \cdot M S$$

tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Resulta entonces

$$[1] \quad f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

donde

$$c_n = \iint_D v^n \varphi(v) d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

desarrollo convergente para todo z tal que $|z| > R$.

Además, puesto que

$$c_0 = \iint_D \varphi(v) d\omega$$

es distinto de cero, este desarrollo nos asegura que la función determinante $(B-P)$ es holomorfa y nula en el infinito.

En los puntos interiores al círculo de

$$|z| < R$$

la serie [1] diverge.

El resultado del número anterior nos permite aplicar a la función determinante $(B-P)$, algunas propiedades bien conocidas de la transformada de Laplace.

7. — Apliquemos el método de sumación de M. E. Borel al desarrollo

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

donde

$$c_n = \iint_D v^n \varphi(v) d\omega,$$

de una función determinante ($B-P$), convergente fuera de un círculo de centro en el origen y radio.

$$R = \text{máx } |v|.$$

La asociada (B), tiene por expresión

$$\begin{aligned} u(t, z) = \varphi\left(\frac{t}{z}\right) &= \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{n!} \frac{t}{z^{n+1}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(\frac{t}{z}\right)^n \end{aligned}$$

la cual es una trascendente entera en t ; por tanto la integral de Borel resulta

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-t} \varphi\left(\frac{t}{z}\right) dt.$$

La integral de Borel se transforma, con un simple cambio de variables, en la integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \varphi(x) dx$$

la cual converge en el semiplano: $R(z) > R$.

Si tomamos la integral de Laplace sobre un semi-rayo de centro en O y argumento ω , el campo de convergencia es todo el semiplano que contiene el semi-rayo de centro en O y argumento $(-\omega)$, limitado por la recta tangente a la circunferencia de convergencia en el punto de intercepción con este último rayo.

Al variar ω , se tiene la expresión de $f(z)$ en forma de integral de Laplace convergente en todo punto exterior al círculo de convergencia.

8. *Momentos generalizados.* — Llamaremos *problema de los momentos generalizados* a la cuestión siguiente ⁽¹⁾: Dada la sucesión $\{\alpha_n\}$ de números determinar una función $\varphi(v)$ única, integrable en el dominio D , tal que se tenga

$$\alpha_n = \iint_D \varphi(v) v^n d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Si este problema de los momentos generalizados admite solución, podemos entonces representar toda función $f(z)$ holomorfa, y nula en el infinito, definida por el desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$$

por medio de una integral doble de Beltrami-Poincaré. En efecto, consideremos la serie entera

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad [1]$$

de la variable $\frac{1}{z}$. Supongamos que se pueda determinar una función $\varphi(v)$ acotada e integrable (L) en un cierto dominio finito (D) que satisfaga

$$a_n = \iint_D \varphi(v) v^n d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y tal que

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = R \geq |v|$$

⁽¹⁾ El problema de los *momentos* planteado y resuelto en el campo real por STIELJES (*Annales de la Faculté des S. de Toulouse*; 1894-95), consiste como se sabe en determinar una función única $\varphi(x)$ de la variable real x , integrable en $(0 + \infty)$, tal que se tenga

$$\alpha_n = \int_0^{\infty} \varphi(x) x^n dx \quad n = 0, 1, \dots$$

donde la sucesión α_n está dada. La solución con condiciones cada vez más amplias se debe a BOREL, HARDY, RIEZ y CARLEMAN. En el campo complejo

$$\alpha_n = \int_C f(z) z^n dz$$

la resolución de este problema es inmediato como lo prueban los trabajos de CAUCHY, LAURENT y RIEMANN, si C es una curva cerrada.

cuando la variable v recorre el dominio cerrado D . En esta hipótesis, la [1] define una función holomorfa $f(z)$ en todo punto z tal que $|z| > R$ y nula en el infinito, la cual es *determinante* (B-P) cuya *generatriz* (B-P) es $\varphi(v)$, puesto que se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \left(\iint_D v^n \varphi(v) d\omega \right) = \iint_D \varphi(v) \left[\frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \left(\frac{v}{z} \right)^n \right] d\omega = \\ &= \iint_D \frac{\varphi(v)}{z \left(1 - \frac{v}{z} \right)} d\omega \end{aligned}$$

es decir

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} d\omega.$$

9. *Desarrollo en serie de facultad.* — De la función determinante (B-P) se puede dar un desarrollo en serie de facultad. En efecto; sea la transformada

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} d\omega, \quad [1]$$

el núcleo $\frac{1}{z - v}$ admite el desarrollo en serie de facultad convergente ⁽¹⁾

$$\frac{1}{z - v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v(v+1) \dots (v+n-1)}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

cuya abscisa de convergencia es: $\lambda = \text{máx } R(v)$ cuando v recorre el dominio cerrado D . Se tiene entonces *formalmente*

$$\begin{aligned} f(z) &= \iint_D \varphi(v) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v(v+1) \dots (v+n-1)}{z(z+1) \dots (z+n)} \right] d\omega = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n)} \iint_D \varphi(v) \cdot v(v+1) \dots (v+n-1) d\omega \end{aligned}$$

(1) N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Fos. (1926) p. 176.

y poniendo

$$a_n = \iint_D \varphi(v) \cdot v \cdot (v+1) \dots (v+n-1) d\omega = \iint_D \varphi(v) v^n d\omega$$

resulta

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z(z+1) \dots (z+n)}.$$

Se puede probar el desarrollo efectivo, partiendo de la identidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-v} &= \frac{1}{z} + \frac{v}{z(z+1)} + \dots + \frac{v(v+1) \dots (v+n-1)}{z(z+1) \dots (z+n)} \\ &+ \frac{v(v+1) \dots (v+n)}{z(z+1) \dots (z+n)} \frac{1}{z-v}, \end{aligned}$$

para z exterior al dominio D .

10. *Desarrollo en serie de polinomios.* — Se puede también obtener para la función determinante ($B \cdot P$), un desarrollo en serie de polinomios.

En efecto, la integral doble [1] se puede escribir

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} d\omega = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{v}} d\omega$$

El núcleo

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{v}}$$

admite un desarrollo en serie de polinomios ⁽¹⁾.

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{v}} = \sum_1^{\infty} P_n \left(\frac{z}{v} \right)$$

uniformemente convergente en todo punto

$$u = \frac{z}{v}$$

interior a un dominio (A) que sea exterior a la estrella rectilínea con un solo rayo $(1, + \infty)$.

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, T. II, p. 163; P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, París (1910).

En virtud de la convergencia uniforme resulta entonces

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \iint_D \frac{\varphi(v)}{v} P_n\left(\frac{z}{v}\right) d\omega = \sum_0^{\infty} Q_n(z)$$

donde

$$Q_n(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v} P_n\left(\frac{z}{v}\right) d\omega$$

representa un polinomio en z

Poniendo:

$$P_n\left(\frac{z}{v}\right) = C_{0n} + C_{1n} \frac{z}{v} + \dots + C_{mn} \left(\frac{z}{v}\right)^m$$

entonces

$$Q_n(z) = \sum_{p=0}^m C_{pn} z^p \iint_D \frac{\varphi(v)}{v^{p+1}} d\omega = \sum_{p=0}^m C_{pn} a_p z^p$$

donde

$$a_p = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v^{p+1}} d\omega$$

Por tanto, resulta que, para todo punto z de la estrella rectilínea, se tiene el desarrollo

$$f(z) = \sum_0^{\infty} Q_n(z)$$

el cual es, a su vez, uniformemente convergente en todo dominio D interior a la estrella.

11. FAMILIA DE FUNCIONES DETERMINANTES. — Consideremos ahora una familia infinita de funciones $\varphi(z)$ definidas en un dominio común D , la integral doble

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z} d\omega$$

define una nueva familia infinita de funciones continuas $f(z)$ en todo el plano de z .

Esta última está formada de funciones *holomorfas* cuando el punto z es exterior a D y de *funciones holomorfas* (α) cuando z pertenece a D .

Vamos a probar que en ambos casos las funciones $f(z)$ de la variable compleja z forman una *familia normal* en el sentido de M. P. Montel.

Teorema I. — Si las funciones generatrices $\varphi(v)$ son acotadas en su conjunto en D , las funciones determinantes $f(z)$ forman una familia normal en D o en una región finita (A) exterior a D .

Consideremos primeramente el caso que las $f(z)$ sean holomorfas (α) ; y sea z' y z'' dos puntos cualesquiera de D .

Se tiene

$$f(z') = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z'} d\omega, \quad f(z'') = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z''} d\omega$$

por tanto

$$f(z') - f(z'') = \iint_D \varphi(v) \left[\frac{z'' - z'}{(z' - v)(z'' - v)} \right] d\omega$$

De aquí, según un teorema de M. Denjoy ⁽¹⁾ y de Theodoresco ⁽²⁾, y teniendo presente que por hipótesis, existe una constante positiva M tal que

$$|\varphi(v)| < M \quad [1]$$

para todo punto v de D y cualquiera sea la función $\varphi(v)$ de la familia; resulta

$$|f(z') - f(z'')| < A |z' - z''|^\alpha, \quad (0 < \alpha < 1), \quad A > 0 \quad [2]$$

para todo par de puntos z', z'' de D y cualquiera sea la función $f(z)$ de su familia.

Si fijamos ahora un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede determinar un $\delta > 0$, tal que se verifique, según la [2]

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

para todo par de puntos de D ,

$$|z' - z''| < \delta$$

y cualquiera sea la función $f(z)$ de la familia; por tanto las funciones son *igualmente continuas* en el dominio D .

Finalmente, como una familia de funciones de una variable compleja, igualmente continua en un dominio D forma una familia normal en dicho dominio ⁽³⁾, la primera parte del teorema queda demostrada.

⁽¹⁾ *Compte Rendus*.

⁽²⁾ *Thésis*, París, 1931.

⁽³⁾ P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales...* París (1927).

Si el punto z pertenece a una región limitada (A) completamente exterior al dominio D , las funciones $f(z)$ son holomorfas y acotadas en su conjunto. En efecto, según la desigualdad [1] resulta

$$|f(z)| < M \iint_D \frac{d\omega}{|z-v|},$$

y haciendo

$$z-v = \rho e^{i\theta}, \quad d\omega = \rho d\rho d\theta$$

se tiene

$$|f(z)| < M \iint_D d\rho d\theta < MS.$$

Por tanto, según el teorema fundamental de Montel, la familia $t(z)$ es normal y acotada en todo dominio (A) exterior al D .

Teorema II. — Si la sucesión de funciones $\varphi_n(z)$ generatrices converge uniformemente a la función $\varphi(z)$, en el dominio D , la sucesión de sus funciones determinantes $f_n(z)$ converge uniformemente hacia una función $f(z)$, holomorfa (α) en los puntos interiores con derivada areolar $\varphi(v)$, y holomorfa en los puntos exteriores. En efecto; de la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(z)$ en D , a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario le corresponde un p tal que

$$|\varphi(v) - \varphi_n(v)| < \varepsilon$$

para $n \geq p$ y v en D .

Consideremos ahora las transformadas ($B-P$)

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

y

$$f_n(z) = \iint_D \frac{\varphi_n(v)}{v-z} d\omega$$

se tiene

$$f(z) - f_n(z) = \iint_D \frac{\varphi(v) - \varphi_n(v)}{v-z} d\omega$$

de donde

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \iint_D \frac{d\omega}{|z-v|} < \varepsilon S$$

para $n \geq p$ y z interior a D .

De aquí resulta que la sucesión $f_n(z)$ converge uniformemente a la función límite $f(z)$ en D , holomorfa (α) y cuya derivada areolar es $\varphi(v)$.

Si el punto pertenece a una región (A) completamente exterior a D , se prueba la segunda parte del teorema en la misma forma.

Observación. — Si las funciones $\varphi_n(z)$ son holomorfas en D , entonces es suficiente suponer que ella converge uniformemente a $\varphi(z)$ sobre el contorno C que limita el dominio D ; puesto que en virtud del teorema clásico de Weierstrass, la sucesión converge uniformemente en el interior de D y el teorema anterior es aplicable.

II. — FORMULA DE INVERSION

12. Es bien conocida la célebre fórmula de Riemann (¹)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-xz} dx \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(t) e^{xt} dt$$

que permite representar una función $f(z)$ holomorfa en un semi-plano $R(z) \geq a$, mediante una integral de Laplace de generatriz

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(t) e^{xt} dt$$

La justificación de esta fórmula con condiciones diversas y la aplicación de la misma a diversos capítulos de la teoría de funciones, ha dado origen a numerosos trabajos fundamentales (²).

Recientemente se han propuesto otras fórmulas de inversión de la transformada de Laplace (³)

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x) dx.$$

Para las funciones holomorfas $f(z, w)$ de dos variables complejas definidas en el dominio

$$R(z) \geq \xi, \quad R(w) \geq \eta$$

vale una fórmula análoga. (⁴)

(¹) RIEMANN (*Werke*, Dedekind e Weber, Leipzig, 1876, p. 140).

Véase: S. PINCHERLE, *Sull'inversione degli integrali definite*, Mem. della Soc. Italiana delle Sc., t. 15 (1908); *Sur les fonctions determinantes*, Annal. de l'Ecole Normale Supérieure, t. XXII (1905); *Acta Math.* (1907); *Rendic. della Accad. dei Lincei* (1902).

(²) TAMARKIN, *On Laplace's integral equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926).

CHURCHILL, *The inversion of the Laplace transformation...*, Math. Zeitsch. 42 (1937); *Math. Annalen* 114 (1937); *Math. Zeitsch.* 43 (1938).

(³) WIDDER, *The inversion of the Laplace integral and the related moment problem*, Trans. Americ. Math. Soc., 36 (1934).

F. TRICOMI, *Trasformazione di Laplace i polinomi di Laguerre*, Atti R. Acc. N. dei Lincei, V, XXI (1935).

(⁴) J. C. VIGNAUX, *La teoría de las funciones determinantes de dos variables*, Anales de la Soc. Científica Argentina (1933) t, CXII (1933). *Sulla trasformazione di Laplace di due variabili*, R. Accademia N. dei Lincei, Roma, 17 agosto 1933.

Nos proponemos generalizar aquí la fórmula de Riemann, a las *funciones holomorfas* (α). Estas funciones constituyen una clase mucho más amplia que la clase formada por las funciones holomorfas ordinarias, y han sido estudiadas muy particularmente por M. Pompeiu ⁽¹⁾, Calugareno ⁽²⁾, Theodoresco ⁽³⁾, Nicolesco ⁽⁴⁾ y Burgatti ⁽⁵⁾, para el caso de una variable, y por Tonolo, Vignaux y Martinelli para las funciones de varias variables.

Se llama *función holomorfa* (α), toda función compleja de la variable $z = x + i y$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad [1]$$

que admite una derivada areolar $\varphi(z)$ *continua* en todo un dominio D .

La derivada areolar de las funciones holomorfas ordinarias es idénticamente nula en todo su dominio de holomorfismo y recíprocamente, si la derivada areolar de la función $f(z)$ es idénticamente nula en un dominio D , la función es holomorfa en este dominio.

Una función holomorfa (α) en un dominio D , limitado por el contorno cerrado simple y rectificable C , puede ser representada por la fórmula fundamental de M. Pompeiu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

donde z es un punto cualquiera del dominio D ; t y v puntos que recorren el contorno C y el dominio D respectivamente, y $\varphi(v)$ la derivada areolar.

Esta fórmula contiene como caso particular la fórmula integral de Cauchy cuando $\varphi(v) \equiv 0$ en D .

13. CONVERGENCIA CIRCULAR. — Consideremos un semicírculo (R) de centro en el origen y radio R arbitrariamente grande, situado en el semiplano $x \geq 0$, y sea $f(x, y)$ una función de dos variables reales integrable en dicho dominio.

⁽¹⁾ *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. 33 (1912), p. 108; t. 35 (1913), p. 227.

⁽²⁾ *Thèses*, París. 1929.

⁽³⁾ *Thèses*, París, 1931.

⁽⁴⁾ *Thèses*, París, 1926.

⁽⁵⁾ *Bull. Unione Mat. Italiana* (1922).

Si la integral doble

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy$$

tiende a un límite finito S cuando el radio R crece indefinidamente, diremos que ella *converge por semicírculos* al valor S ; es decir, fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $\eta(\varepsilon)$ tal que

$$\left| S - \iint_{(R)} f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon$$

para todo $R > \eta$. Este límite indicaremos con la notación ⁽¹⁾

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \iint_0^{+\infty} f(x, y) dx dy.$$

Sea (C) la semi-corona circular limitada por los semi-círculos de radio R y R' y el eje Oy . La condición necesaria y suficiente para que la integral doble

$$\iint_0^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

sea convergente, es que el módulo de la integral doble

$$\iint_{(C)} f(x, y) dx dy$$

tienda a cero, cuando los radios R y R' crecen indefinidamente simultánea e independientemente.

Consideremos ahora la integral doble convergente

$$F(\alpha, \beta) = \iint_0^{+\infty} f(x, y; \alpha, \beta) dx dy \quad [1]$$

función de dos parámetros (α, β) que varían en un cierto dominio D . Sea $\varphi(x, y)$ una función verificando la condición

$$|f(x, y; \alpha, \beta)| < |\varphi(x, y)| \quad [2]$$

para todo punto (α, β) de D y tal que la integral doble

$$\iint_0^{+\infty} |\varphi(x, y)| dx dy \quad [3]$$

sea convergente. En estas condiciones la integral [1] converge *uniformemente* en el dominio D .

⁽¹⁾ Las diversas definiciones de convergencia propuestas para las series dobles, de PRINGSHEIM (*convergencia por rectángulos*); de LEGA (*convergencia por triángulos*); de HARDY (*convergencia regular*), se extienden a las integrales dobles.

Esta noción de *convergencia por semi-círculos* nos será muy útil en lo que sigue.

En efecto; de la convergencia de la [3], a todo número $\varepsilon > 0$ y arbitrario, resulta

$$\iint_{(C)} |\varphi(x, y)| dx dy < \varepsilon$$

cuando se toman los radios R y R' de la semi-corona (C) suficientemente grandes. Por tanto, según la [2] resulta

$$\left| \iint_{(C)} f(x, y; \alpha, \beta) dx dy \right| < \varepsilon$$

para todo punto $M(\alpha, \beta)$ de D ; luego la integral [1] converge uniformemente en este dominio.

Un caso más general resulta considerando un círculo de radio R y centro en el origen; entonces la *convergencia circular* está definida por la relación

$$S = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_R f(x, y) dx dy = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

14. FORMULA DE INVERSION GENERALIZADA. — Sea $f(z)$ una función holomorfa (α) en el semi-plano $R(z) \geq a$, y tal que

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{\beta+1}} \quad (\beta > 0, \quad M > 0)$$

para todo z de esta región y sea $\varphi(z)$ su derivada areolar. Consideremos el semicírculo (R) limitado por el contorno C formado por la semicircunferencia

$$|z| = R, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad [1]$$

y el segmento de recta $\mathcal{R}(z) = a$; se tiene, según la fórmula de M. Pompeiu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi} \iint_{(R)} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega \quad [2]$$

donde z es un punto del círculo (R) .

Consideremos la integral de contorno que figura en el segundo miembro descompuesta en la forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{BPA} \frac{f(t) dt}{t-z}.$$

En virtud de la desigualdad [1], la integral extendida sobre el arco de circunferencia, tiende hacia cero, cuando $\mathcal{R} \rightarrow +\infty$; mientras la integral sobre la recta $\mathcal{R}(z) = a$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

es uniformemente convergente en todo el dominio $\mathcal{R}(z) > a$; en consecuencia el

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \iint_{(R)} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega = \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

existe y resulta la igualdad

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega.$$

Por otra parte, como es $R(z-t) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{z-t} = \int_0^{\infty} e^{-(z-t)x} dx \quad (x \geq 0)$$

por tanto, para $R(z) > a$, es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} e^{-(z-t)x} dx - \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

y cambiando el orden de integración, lo cual es legítimo, resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-zx} dx \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tx} f(t) dt - \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

Finalmente, si ponemos

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tx} f(t) dt$$

se tiene entonces

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x) dx - \frac{1}{\pi} \iint_0^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

que es la fórmula buscada.

Esta fórmula nos permite representar una función *holomorfa* (α) dada en un semiplano $R(z) \geq a$ y que satisface además a una condición de crecimiento de la forma [1], mediante la suma de dos integrales convergentes. La primera, es una integral de Laplace

$$g(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x) dx,$$

define una función holomorfa ordinaria $g(z)$, mientras que la integral doble ⁽¹⁾

$$h(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega$$

representa la parte *holomorfa* (α) de la función $f(z)$.

A propósito de esta integral doble, debemos observar que ella converge uniformemente por semicírculos, siempre que $\varphi(v)$ sea la derivada areolar de una función holomorfa (α) que verifica a la condición

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad (\delta > 0, \quad M > 0)$$

en todo el semiplano $R(z) \geq a$. Además ella tiene por valor

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z} d\omega = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x) dx - f(z)$$

en todo punto z de dicha región.

Cuando la derivada areolar $\varphi(v)$ es idénticamente nula en toda la región $R(z) \geq a$, entonces es $h(z) = 0$, y como en tal caso la $f(z)$ es holomorfa en dicha región, nuestra fórmula coincide con la fórmula de Riemann.

(1) Una integral doble análoga a la anterior, extendida a todo el plano, ha utilizado M. Borel para representar una función analítica, uniforme, regular y nula al infinito. *Sur la théorie du potentiel Logarithmique*. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, t. CLIV (1912), p. 1686.

E. BOREL, *Leçons sur les Fonctions Monogenes*. Gauthier-Villars, París, 1917, pág. 145-150.

R. CACCIOPPOLI, *Intégrales doubles de Cauchy et fonctions monogenes généralisées*. Comp. Rend. 198, 1934, pág. 2227; *Le funzione monogene generalizzate definite mediante integrali doppi di Cauchy*, Rendiconti del Sem. Mat. della R. Univ. di Padova, N°. 3-4, 1934.

TABLAS DE LAS LINEAS ULTIMAS

Por el Dr. Adolfo T. Williams

(Conclusión)

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

W ⁽¹⁾

5514,72	10	10	⁵ D — 14°	+ 1	+ 1	0,41	⁵ P°
5492,34	10	10					
5224,68	10	10	⁵ D — 17°	+ 1	+ 1	0,60	⁵ P°
5053,30	10	2	⁵ D — 14°	— 1	0	0,23	⁵ P°
4302,12	8	5	⁷ S — {	21° — 1	0	0,36	U; ⁷ P°
4294,62	6R	9		22° — 1	— 1	0,36	U; ⁷ P°
4008,76	10	10		27° ?	?	0,36	U.
3215,57	4	5	1 — 88°	?	0	1,51	U.
2947,37	6	3	⁵ D — 65°	— 1	— 1	0,60	⁵ F°
2946,98	6R	3	⁷ S — 56°	— 1	0	0,36	⁷ P°
2944,31	5R	3	⁷ S — 57°	— 1	+ 1	0,36	⁷ P°
2896,44	4R	3					
2896,01	3R	2	⁵ D — 53°	?	0	0,23	⁵ D°
2879,40	3R	2	⁵ D — 49°	— 1	— 1	0,0	⁵ F°
2879,11	3R	2	⁷ S — 60°	— 1	0	0,36	⁷ P°
2866,39	5	2	⁵ D — 70°	+ 1	+ 1	0,60	⁵ P°
2831,39	5	2	⁷ S — {	64° — 1	— 1	0,36	⁷ P°
2724,40	3	2		69° — 1	0	0,36	⁷ P°
2681,50	2	2		73° — 1	0	0,36	⁷ P°
2555,17	3	3					

U

6449,19	20	1					
5915,39	8	1					
5527,84	10	4					
5492,94	9	4					
5027,38	5	4					
4241,68	5	4					
3672,59	1	2					
3552,20	1	2					

Columna VII (a)

F

6902,46	30	⁴ P — ⁴ D°	— 1	— 1	12,7
6856,01	40	⁴ P — ⁴ D°	— 1	— 1	12,7

(1) Véase Memorias citadas a propósito del Hf, página 147.

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Cl

4819,40	—	10					Cl (II) ?
4810,00	—	10					Cl (II) ?
4794,50	—	10					Cl (II) ?
1396,50		3	$^2P^\circ - ^4P$	0	-1	0,11	$\Delta R = 2.$
1379,60		5	$^2P^\circ - ^4P$	0	0	0,0	$\Delta R = 2.$

Br

1633,80		10	$^2P^\circ - ^4P$	0	-1	0,46	$\Delta R = 2.$
1540,80		6	$^2P^\circ - ^4P$	0	0	0,0	$\Delta R = 2.$

I

5464,60	—	5					I (II) ?
5161,20	—	10					I (II) ?
2062,10		10					
1782,90		9					

Columna VII (b)

Mn

6021,79	10	10	$^6P^\circ -$	6S	+1	+1	3,25	
6016,64	10	10		6S	+1	0	3,25	U.
6013,50	10	10		6S	+1	-1	3,25	
4823,52	10	4	$^8P^\circ -$	8S	+1	+1	2,30	W.
4783,43	10	4		8S	+1	0	2,39	W.
4766,42	6	3		$^4F^\circ$	-1	-1	2,90	W.
4762,38	9	4	$^4D -$	$^4F^\circ$	-1	-1	2,86	W.
4754,05	10	8		$^8P^\circ - ^8S$	+1	-1	2,28	W.
4739,00	5	2	$^4D -$	$^4F^\circ$	-1	0	2,93	
4727,46	7	2		$^4F^\circ$	-1	0	2,90	
4709,70	7	2		$^4F^\circ$	-1	0	2,86	
4034,47	8R	10R	$^6S -$	$^6P^\circ$	-1	+1	0,0	W.
4033,07	8R	10R		$^6P^\circ$	-1	0	0,0	W.
4030,76	6R	10R		$^6P^\circ$	-1	-1	0,0	U; L. W.
3264,71	4	2						W.
3260,24	4	2	$^6D -$	$^6F^\circ$	-1	-1	2,16	W.
3258,42	4	2		$^6F^\circ$	-1	0	2,16	W.
3252,95	4	2		$^6F^\circ$	-1	0	2,16	W.
3248,52	4	2		$^6F^\circ$	-1	-1	2,16	W.
3243,79	4	2		$^6F^\circ$	-1	0	2,16	W.
2801,08	6R	5R		$^6P^\circ$	-1	+1	0,0	L. W.
2798,27	6R	5R	$^6S -$	$^6P^\circ$	-1	0	0,0	L. W.
2794,82	6R	5R		$^6P^\circ$	-1	-1	0,0	W.

λ I. A.	I		Serie	Δl	Δj	E. P.	Observaciones
	a	c					

Re

4889,15	200	$^6S - ^6P^o$	-1	-1	0,0	U.
4513,31	30	$^8P^o - ^8S$	+1	0	2,54	
4257,61	5	$^6D - ?^o$	?	+1	1,76	
3464,72	80	$^6S - \begin{cases} ^6P^o \\ ^6P^o \\ ^6P^o \end{cases}$	-1	0	0,0	
3460,47	100		-1	-1	0,0	
3451,88	60		-1	+1	0,0	

Columna VIII

He

5875,63	10	$^3P^o - ^3D$	-1	-1	20,95	U.
3888,64	10	$^3S - ^3P^o$	-1	-1	19,70	
584,40	10	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	0,0	

Ne

6402,24	10	$^3P^o - 2$	?	-1	16,5	$\Delta R = 2.$
5852,48	10	$^1P^o - 10$	?	+1	16,7	
5400,56	10	$^3P^o - 10$	?	+1	16,6	
743,73	9	$^1S - ^3P^o$	-1	-1	0,0	
735,95	10	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	0,0	

A

8115,30	10	$1^o - 2$	?	-1	11,5	
7503,86	4	$4^o - 10$	?	+1	11,7	
7067,21	5	$1^o - 8$	?	0	11,5	
6965,43	6	$1^o - 9$	?	+1	11,5	
1066,70	9	$^1S - 2^o$	?	-1	0,0	
1048,26	10	$^1S - 4^o$	?	-1	0,0	

Kr

5870,91	10	$2^o - 9$	?	-1	10,0	$^3P^o?$
5570,29	10	$1^o - 8$	?	+1	9,9	$^3P^o?$

Xe

4671,22	10	$1^o - \begin{cases} 3 \\ 5 \\ 9 \end{cases}$	?	-1	8,25	
4624,27	10		?	0	8,25	
4500,97	8		?	+1	8,25	
1469,00		$^1S - 2^o$	?	-1	0,0	
1295,80		$^1S - 4^o$	?	-1	0,0	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Grupo del Fe

Fe

5371,49	7	6		$\begin{cases} {}^5D^\circ \\ {}^5F \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,95 \\ 0,92 \end{cases}$	
5328,04	7	6						U.
5269,54	10	8		$\begin{cases} {}^5D^\circ \\ {}^5D^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,86 \\ 0,86 \end{cases}$	U.
5232,95	8	5		${}^7P^\circ - {}^7D$	-1	-1	2,94	
5227,19	8	4		$\begin{cases} {}^3D^\circ \\ {}^3F \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,55 \\ 1,55 \end{cases}$	$\Delta R = 2.$
4404,75	8	10		$\begin{cases} {}^5G^\circ \\ {}^5G^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,55 \\ 1,48 \end{cases}$	$\Delta R = 2.$
4383,55	10	10						
4045,82	8	10		${}^3F - {}^3F^\circ$	0	0	1,48	
3859,91	7R	6		${}^5D - {}^5D^\circ$	0	0	0,0	L.
3820,43	8R	10		${}^5F - {}^5D^\circ$	+1	+1	0,86	
3815,84	7R	10		${}^3F - {}^3D^\circ$	+1	+1	1,48	L.
3767,19	6R	5		$\begin{cases} {}^5F^\circ \\ {}^5F \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,01 \\ 0,95 \end{cases}$	L.
3758,23	7R	8						L.
3749,49	8R	10		$\begin{cases} {}^5F^\circ \\ {}^5F^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,92 \\ 0,92 \end{cases}$	
3748,26	6R	4		$\begin{cases} {}^5F^\circ \\ {}^5D \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,11 \\ 0,12 \end{cases}$	
3745,90	6	4						
3745,56	7R	5		$\begin{cases} {}^5F^\circ \\ {}^5F^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,08 \\ 0,08 \end{cases}$	
3737,14	7R	6						L.
3734,87	9R	10		${}^5F - {}^5F^\circ$	0	0	0,86	L.
3722,57	6R	4		${}^5D - {}^5F^\circ$	-1	0	0,08	
3719,94	8R	10		${}^5D - {}^5F^\circ$	-1	-1	0,0	U; L.
3647,85	6R	6						
3617,79	6	3						
3581,20	8R	10						
3570,10	7R	10		${}^5F - {}^3G^\circ$	-1	-1	0,92	$\Delta R = 2.$
3565,38	6R	5		${}^5F - {}^3G^\circ$	-1	-1	0,95	$\Delta R = 2.$
3490,58	6R	4						
3475,46	6R	3						
3440,99	6R	4		$\begin{cases} {}^5P^\circ \\ {}^5P^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,05 \\ 0,0 \end{cases}$	L.
3440,61	7R	4						
3047,61	6	3		$\begin{cases} {}^5D^\circ \\ {}^5D^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,08 \\ 0,05 \end{cases}$	2e.
3021,08	6R	3		${}^5D - {}^5D^\circ$	0	0	0,05	2e; L.
3020,65	6R	3		$\begin{cases} {}^5D^\circ \\ {}^5D^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0 \\ 0,0 \end{cases}$	2e; L.
2983,57	4R	3		$\begin{cases} {}^5D^\circ \\ {}^5F^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0 \\ 0,05 \end{cases}$	2e.
2973,24	4	2						2e.
2966,90	6R	3		$\begin{cases} {}^5F^\circ \\ {}^5F^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0 \\ 0,0 \end{cases}$	2e.
2767,52	7	5		${}^5F - {}^5D^\circ$	+1	0	0,9	
2742,41	6	1		$\begin{cases} {}^5P^\circ \\ {}^5D \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,08 \\ 0,05 \end{cases}$	
2720,91	7	2						L.
2719,04	7	2		$\begin{cases} {}^5P^\circ \\ {}^5P^\circ \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} +1 \\ +1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0 \\ 0,0 \end{cases}$	
2527,44	4	2		${}^5D^\circ$	0	0	0,05	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Fe

2524,29	6	2	5D —	${}^5D^\circ$	0	+1	0,11	L.
2522,86	4	1		${}^5D^\circ$	0	0	0,0	
2488,15	4	1		${}^5F^\circ$	—1	—1	0,05	
2484,19	6	—						
2483,28	5R	3		${}^5F^\circ$	—1	—1	0,0	L.

Ru

5636,24	5	3						
5171,02	40	2						
5057,32	6	2						
4869,15	25	3						
4709,49	35	5	3F — 16°	?	0		0,78	
4584,45	30	8						
4554,52	50R	10	3F — 13°	?	—1		0,78	
3786,04	10R	10		${}^5D^\circ$	+1	+1	0,33	L.
3728,02	10R	8		${}^5F^\circ$	0	0	0,0	
3726,93	10R	8		${}^5F^\circ$	0	0	0,15	
3719,32	4	2		—	—	—	—	
3661,35	8R	10		13°	?	—1	0,15	G°?
3634,94	10R	3	5F —	${}^5D^\circ$	+1	—1	0,0	
3596,17	10R	6		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,26	
3593,03	10R	6		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,33	
3498,95	10R	8		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,0	U; L.
3436,74	10R	5		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,15	
3417,35	10R	3		19°	?	—1	0,26	G°?

Os

5857,79	15	—						U.
5523,55	30	—						
4794,00	15	3						
4420,46	10	10						
4260,85	10	5						
3782,20	20	4						
3752,70	10	7						
3301,56	9	2						
3267,94	8	3						
3262,30	7	4	D — 4				0,51	
3058,66	7	4	F — 2				0,0	
3030,70	4	3	C — 6				0,64	
3018,04	5	3						
2909,08	7	5						
2838,63	5	3	C — 10				0,64	
2637,12	4	2	F — 5				0,0	
2488,55	4	2						

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Grupo del Co

Co

5353,48	10	2					
5342,68	8	2	$^4G - 27^\circ$	?	?	3,62	$j = 4?$
5266,49	6	1	$^2G - ^2F^\circ$	+1	+1	2,02	2e.
4867,88	8	8					
4840,28	8	8					
4813,48	8	10					
4792,87	8	8					
4780,00	5	4					
4121,33	10R	10R	$^2G^\circ$	-1	-1	0,92	L.
4118,78	8R	10					
4110,54	7	10	$^2F -$				
3995,31	8R	10	$^4G^\circ$	-1	-1	0,92	$\Delta R = 2.$
3935,97	6R	10	$^4F^\circ$	0	-1	0,92	$\Delta R = 2.$
3894,08	9R	10	$^2G^\circ$	-1	-1	1,05	
3873,96	7R	10	$^4F - ^4D^\circ$	+1	+1	0,51	L.
3873,12	7R	10	$^4F - ^4D^\circ$	+1	+1	0,43	L.
3845,48	10R	10	$^2F - ^2G^\circ$	-1	-1	0,92	
3842,06	6R	10	$^2F - ^2D^\circ$	+1	+1	0,92	L.
3602,08	5R	4	$^4F - ^4F^\circ$	0	0	0,22	
3587,19	8R	10	$^2F - ^2F^\circ$	0	0	1,05	
3574,96	5R	4	$^4F - ^4D^\circ$	+1	0	0,58	L.
3569,38	6R	10	$^2F - ^2F^\circ$	0	0	0,92	
3529,81	8R	6	$^4F - ^4G^\circ$	-1	-1	0,51	
3526,85	9R	6	$^4F - ^4F^\circ$	0	0	0,0	L.
3518,35	6R	7	$^2F - ^2D^\circ$	+1	+1	1,05	
3512,64	4R	6	$^4D^\circ$	+1	+1	0,58	
3506,32	6R	8	$^4F -$	+1	+1	0,51	
3502,28	5R	6	$^4D^\circ$	+1	+1	0,43	L.
3489,40	5R	7	$^2F - ^2D^\circ$	+1	+1	0,92	
3474,02	9R	8	$^4F^\circ$	0	+1	0,0	L.
3465,79	6R	5	$^4G^\circ$	-1	-1	0,0	
3462,81	6R	5	$^4F^\circ$	0	-1	0,63	L.
3453,51	6R	10	$^4G^\circ$	-1	-1	0,43	U; L.
3449,45	6R	5	$^4G^\circ$	-1	0	0,43	
3449,17	6R	5	$^4F -$	-1	0	0,58	
3443,64	3R	6	$^4G^\circ$	-1	0	0,51	
3442,92	4R	3	$^4D^\circ$	+1	+1	0,17	
3433,04	6R	6	$^4F^\circ$	0	0	0,63	L.
3417,16	4R	4	$^4F^\circ$	0	0	0,58	L.
3412,64	3R	3	$^4D^\circ$	+1	+1	0,0	

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Co

3412,34	4R	4	4F —	${}^2G^\circ$	— 1	— 1	0,51	$\Delta R = 2.$
3409,18	4R	6		${}^4F^\circ$	0	0	0,51	L.
3405,12	7R	10		${}^4F^\circ$	0	0	0,43	U; L.
3395,38	10R	5		${}^2G^\circ$	— 1	— 1	0,58	$\Delta R = 2.$
3390,40	5	1						
3388,18	9R	5	4F —	${}^4F^\circ$	0	+ 1	0,58	
3044,00	8R	4		${}^4F^\circ$	0	0	0,0	L; 2e.
2528,97	3R	2		${}^4D^\circ$	+ 1	+ 1	0,1	
2407,26	2R	1		${}^4G^\circ$	— 1	0	0,0	

Rh

6752,38	20	1	${}^4D^\circ - {}^4F$		— 1	— 1	3,35	
5599,43	40	3	${}^4P - {}^4D^\circ$		— 1	— 1	1,14	
5379,08	30	3	$11^\circ - D$		?	?	4,88	
5354,38	50	5	${}^2G^\circ - {}^4G$		0	+ 1	3,90	$\Delta R = 2.$
5193,13	30	3	${}^4G^\circ - {}^4H$		— 1	— 1	3,53	
4851,62	20	3						
4675,02	20	5	2F —	${}^4D^\circ$	+ 1	0	0,70	$\Delta R = 2.$
4528,73	20	5		${}^4F^\circ$	0	— 1	0,98	$\Delta R = 2.$
4374,82	10R	10		${}^4G^\circ$	— 1	— 1	0,70	$\Delta R = 2.$
3799,31	10R	10		${}^2F^\circ$	0	0	0,70	
3692,35	10R	10	4F —	${}^4D^\circ$	+ 1	+ 1	0,0	
3657,99	10R	10		${}^4D^\circ$	+ 1	+ 1	0,19	
3596,19	10R	10		${}^4D^\circ$	+ 1	+ 1	0,32	
3502,53	10R	10		${}^4G^\circ$	— 1	0	0,0	
3434,90	10R	10		${}^4G^\circ$	— 1	— 1	0,0	U.
3396,82	10R	10		${}^4F^\circ$	0	0	0,0	
3323,10	10R	5		${}^2G^\circ$	— 1	— 1	0,19	$\Delta R = 2.$

Ir

5894,08	15	—						
5625,55	20	—						
5449,50	30	1						U.
5364,32	20	—						
4938,09	15	—						
3513,67	9	8						U.
3437,10	4	3						
3368,50	8	3						

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ir

3220,79	8	5	$^2D - 1^\circ$			0,35	U.
3218,47	4	2					
3133,31	6	5					
3100,42	4	3					
3068,88	4	3	$^2D - 4^\circ$			0,35	
3064,51	4	1					
2943,17	5	4					
2924,81	8	4				0,0	
2849,74	7	4				0,0	
2824,44	6	4				0,35	
2823,18	5	2	$^2D -$	$\left\{ \begin{array}{l} 2^\circ \\ 3^\circ \\ 7^\circ \\ 4^\circ \\ 5^\circ \\ 11^\circ \\ 6^\circ \end{array} \right.$		0,0	
2664,77	5	3				0,0	
2661,99	6	3				0,35	
2639,70	4	3				0,35	
2564,17	4	2					
2543,98	5	4	$^2D - 14^\circ$			0,35	
2372,78	4	2	$^2D - 14^\circ$			0,0	
2242,70	2	3					

Grupo del Ni

Ni

5476,91	10	10	$^1S - ^1P^\circ$	-1	-1	1,82		
5081,12	9	3	$^1F^\circ - ^1G$	-1	-1	3,82		
5080,53	8	3	$^3F^\circ - ^3G$	-1	-1	3,64		
4714,42	10	8	$^5G^\circ - ^5F$	+1	+1	3,36		
3619,59	10	10	$^1D - ^1F^\circ$	-1	-1	0,42	L.	
3524,54	10R	10	$^3D - \begin{cases} ^3P^\circ \\ ^3F^\circ \\ ^3P^\circ \\ ^3D^\circ \end{cases}$	$^3P^\circ$	+1	+1	0,02	L.
3515,06	9R	10		$^3F^\circ$	-1	-1	0,10	L.
3492,96	10R	10		$^3P^\circ$	+1	+1	0,10	
3446,26	10R	10		$^3D^\circ$	0	0	0,10	L.
3437,28	6R	5	$^3F - ^5F^\circ$	0	0	0,0	$\Delta R = 2.$	
3433,57	9R	6	$^3D - \begin{cases} ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \\ ^5F^\circ \end{cases}$	$^3F^\circ$	-1	0	0,02	L.
3414,77	10R	10		$^3F^\circ$	-1	-1	0,02	U; L.
3413,94	3R	2		$^5F^\circ$	-1	0	0,10	$\Delta R = 2$
3413,48	5R	3	$^3F - ^3F^\circ$	0	+1	0,16	2e.	
3409,58	5	1	$^3F - ^3F^\circ$	0	+1	0,0	2e.	
3392,99	10R	8	$^3D - ^3D^\circ$	0	0	0,02	L.	
3380,58	10R	6	$^1D - ^1P^\circ$	+1	+1	0,42	L.	
3134,10	10R	4	$^3D - ^3F^\circ$	-1	-1	0,21		

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ni

3101,88	9R	3	$^1D - ^1F^\circ$	-1	-1	0,42	
3101,56	9R	4	$^3D - ^3F^\circ$	-1	-1	0,10	
3097,11	5	2	$^3F - ^3F^\circ$	0	+1	0,16	
3064,63	6	2	$^3D - ^3D^\circ$	0	-1	0,10	
3057,65	10R	4	$^3D - ^3D^\circ$	0	0	0,21	L.
3054,32	8R	4	$^3D - ^3F^\circ$	-1	-1	0,10	L.
3050,83	10R	6	$^3D - ^3F^\circ$	-1	-1	0,02	L.
3037,94	9R	4	$^3D - ^3F^\circ$	-1	0	0,02	L.
3031,86	3	1	$^3F - ^3F^\circ$	0	0	0,0	
3019,15	5	2	$^3F - ^3F^\circ$	0	+1	0,0	
3012,01	9R	5	$^1D - ^1D^\circ$	0	0	0,42	
3003,63	9R	4	$^3D - ^3D^\circ$	0	0	0,10	L.
3002,49	10R	5	$^3D - ^3D^\circ$	0	0	0,02	L.
2290,03	6	—	$^3F - ^3F^\circ$	0	+1	0,0	

Pd

5547,02	20	1	$^3D^\circ - ^3D$	0	0	4,68	
5542,80	30	1	$^3D^\circ - ^3F$	-1	-1	4,68	
5395,27	20	1	$^1F^\circ - ^1G$	-1	-1	4,93	
5295,59	50	2	$^3F^\circ - ^3G$	-1	-1	4,45	
5163,82	40	1	$^3F^\circ - ^3G$	-1	-1	4,38	
4875,42	20	2	$^3P^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3S \\ ^3P \end{array} \right.$	+1	+1	4,20	
4817,52	30	2	$^3P^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3P \\ ^3D \end{array} \right.$	0	0	4,20	
4788,20	20	2	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3S \\ ^3P \end{array} \right.$	-1	-1	4,20	
3690,37	6R	10	$^1D - ^3F^\circ$	-1	0	1,45	$\Delta R = 2.$
3634,68	10R	10	$^3P^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	+1	+1	0,81	L.
3609,55	9R	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	-1	-1	0,96	L.
3516,95	8R	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	+1	+1	0,96	
3481,16	7R	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	-1	-1	1,23	
3460,75	7R	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	-1	0	0,81	
3441,41	6R	10	$^1D - ^1D^\circ$	0	0	1,45	
3433,41	5R	10	$^1D - ^1P^\circ$	+1	+1	1,45	
3421,23	8R	10	$^3D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3D^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,96	
3404,53	10R	10	$^3D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	-1	-1	0,81	U; L.
3373,00	6R	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3D^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	0	-1	0,96	
3302,14	6R	10	$^3D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3D^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	0	0	1,23	
3242,71	10R	10	$^3D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^3D^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,81	L.

λ I. A	I			Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	b	c				

Pt

5840,13	15	1	4 — 2°	?	0	1,93	
5478,50	12	2	11° — 52	?	+1	4,75	
5475,78	15	2	4° — ³ D	?	0	4,20	
5390,79	10	1	4° — ³ D	?	+1	4,20	
5368,99	15	1	4 — 4°	?	—1	1,93	
5301,02	20	5					
5227,64	20	5	¹ D — 2°	?	0	1,67	
3966,36	8	6	3 — 5°	?	0	1,24	U.
3922,98	8	10					
3268,42	5	1					
3064,71	6R	10	³ D — 2°	?	+1	0,10	U.
3042,62	4R	4	1 — 3°	?	—1	0,10	
2997,96	7R	10	³ D — 4°	?	—1	0,10	
2929,79	8R	4	³ D — 4°	?	0	0,0	
2830,29	8R	5	³ D — 5°	?	0	0,0	
2719,02	5R	4	1 — 9°	?	0	0,10	
2705,89	5R	5	1 — 10°	?	+1	0,10	
2702,40	6R	6	³ D — 10°	?	—1	0,10	
2659,44	10R	10	³ D — 9°	?	—1	0,0	
2650,86	4R	4	1 — 11°	?	—1	0,10	
2628,02	7R	5	³ D — 12°	?	0	0,10	

TABLA II

ATOMOS IONIZADOS ⁽¹⁾

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Columna I (a)

K (II)

3440,40	—	4	9 — 6°	?	— 1	23,4	L.
---------	---	---	--------	---	-----	------	----

Rb (II)

4571,79	—	10	³ P° — 2	?	— 1	19,43	U.
2798,90	—	5					

Cs (II)

4538,90	—	6	5 — 2°	?	0	4,07	
2630,60	—	10					
2525,60	—	10					

Columna I (b)

Cu (II)

2666,44	—	3	³ D — ³ D°	0		2,7	$\Delta R = 2.$
2369,88	5	8	¹ D — ³ F°	— 1		3,24	
2247,80	3	6R	³ D — ³ P°	+ 1		2,70	
2242,62	2	6	¹ D — ³ D°	0		3,24	$\Delta R = 2.$
2228,85	4	4	³ D — {	³ P° + 1		2,96	U.
2218,11	1R	5		³ P° + 1		2,70	
2192,27	3	4		³ F° — 1		2,70	
2135,90	2	3R		³ F° — 1		2,96	

(1) Los potenciales de excitación se refieren al 1°, 2°, etc. espectros de chispas, según los casos.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ag (II)

2799,60	—	8	$^3D^\circ - ^3D$	0	0	10,5	
2767,50	—	8	$^1D - ^3F^\circ$	0	-1	5,7	$\Delta R = 2.$
2660,40	3	8	$^1D - ^3P^\circ$	+1	+1	5,7	$\Delta R = 2.$
2506,65	5	5	$^3D - ^3P^\circ$	-1	0	5,4	
2473,88	3	8	$^1D - ^3D^\circ$	0	-1	5,7	$\Delta R = 2.$
2447,91	2	8	$^1D - ^3F^\circ$	-1	0	5,7	$\Delta R = 2.$
2437,77	3	8	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3F^\circ \\ ^3D^\circ \\ ^3P^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	+1	+1	4,85	
2413,22	4	8		-1	-1	5,05	
2411,38	—	8		0	-1	5,40	
2331,35	4	6		+1	+1	5,05	
2324,63	2	6		-1	0	4,85	
2320,24	2	6	$^1D - ^1F^\circ$	-1	-1	5,70	
2317,03	2	5	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3D^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	-1	-1	5,40	
2248,73	3	3		0	0	5,05	
2246,38	3	3		-1	-1	4,85	
2229,51	2	4		0	0	5,70	

Au (II)

3122,50	—	5	$^3F - ^3F^\circ$	0	+1	3,14	
2802,21	—	10	$^3F^\circ - ^3D$	+1	0	7,10	
2641,50	4	6					
2201,30	—	4	$^3D - ^3D^\circ$	0	-1	1,57	

Columna II (a)

Be (II)

3131,06	10	10R	$^2S - \left\{ \begin{array}{l} ^2P^\circ \\ ^2P^\circ \end{array} \right.$	-1	0	0,0	U.
3130,42	10	10R		-1	-1	0,0	U.

Mg (II)

2936,52	4	10R	$^2P^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^2S \\ ^2S \end{array} \right.$	+1	+1	4,4	
2928,70	3	10		+1	0	4,4	
2802,71	10R	10R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	0,0	U.
2798,02	5	10	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0	4,4	
2795,54	10R	10R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	U.
2790,83	4	10R	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0	4,4	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ca (II)

3968,46	10R	10R	$^2S - \left\{ \begin{array}{l} ^2P^o \\ ^2P^o \end{array} \right.$	-1	0	0,0	U.
3933,67	10R	10R		-1	-1	0,0	U.
3736,91	8	10R	$^2P^o - \left\{ \begin{array}{l} ^2S \\ ^2S \\ ^2D \\ ^2D \end{array} \right.$	+1	+1	3,10	
3706,03	6	8		+1	0	3,10	
3179,33	6	10R		-1	-1	3,10	
3158,87	8	10R		-1	-1	3,10	

Sr (II)

4305,44	5	—	$^2P^o - ^2S$	+1	+1	3,02	
4215,52	10R	10R	$^2S - \left\{ \begin{array}{l} ^2P^o \\ ^2P^o \end{array} \right.$	-1	0	0,0	U; L.
4077,71	10R	10R		-1	-1	0,0	U; L.
3474,90	5	4	$^2P^o - \left\{ \begin{array}{l} ^2D \\ ^2D \\ ^2D \end{array} \right.$	-1	0	3,02	
3464,47	6	7		-1	-1	3,02	
3380,72	5	6		-1	-1	2,93	

Ba (II)

6496,91	10R	10R					
6141,78	10R	10R					
4934,09	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	U.
4899,97	8	8	$^2P^o - ^2S$	+1	+1	2,70	L.
4554,04	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	U; L.
4130,68	8R	10R	$^2P^o - \left\{ \begin{array}{l} ^2D \\ ^2D \\ ^2S \\ ^2D \\ ^2D \\ ^2D \\ ^2D \end{array} \right.$	-1	-1	2,70	
3891,78	8R	8R		-1	-1	2,50	
2647,29	4	4		+1	0	2,50	
2641,40	2	2		-1	0	2,70	
2634,80	5	8		-1	-1	2,70	
2528,51	—	6		-1	-1	2,50	
2347,58	5	7		-1	-1	2,50	
2335,25	6R	10R	$^2D - ^2F^o$	-1	-1	0,70	
2304,22	6R	8R	$^2D - ^2F^o$	-1	-1	0,60	

Ra (II)

4682,20	10	10	$^2S - \left\{ \begin{array}{l} ^2P^o \\ ^2P^o \end{array} \right.$	-1	0	0,0	
3814,44	10	10		-1	-1	0,0	U.

λ I. A	I			Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	b	c					

Columna II (b)

Zn (II)

2557,95	8	10	$^2P^\circ -$	2S	+1	+1	6,1	U.
2502,00	3	10		2S	+1	0	6,1	
2061,90	4	4R	$^2S -$	$^2P^\circ$	-1	0	0,0	
2025,50	10	10		$^2P^\circ$	-1	-1	0,0	

Cd (II)

3250,29	—	8	$^2P^\circ -$	2D	-1	-1	5,45	U.
2748,67	2	10		2S	+1	+1	5,75	
2573,04	4	10		2S	+1	0	5,45	
2312,88	4	10	$^2S -$	2D	-1	-1	5,75	
2265,03	4R	10R		$^2P^\circ$	-1	0	0,0	U.
2144,39	4R	6R		$^2P^\circ$	-1	-1	0,0	

Hg (II)

2847,70	6	10	$^2P^\circ - ^2S$	+1	+1	7,50	U.
1942,00	10	—	$^2S -$	$^2P^\circ$	-1	0	
1649,80	—	10		$^2P^\circ$	-1	-1	

Columna III (a)

B (II)

3451,20	—	6	$^1P^\circ - ^1D$	-1	-1	9,1	
1362,46	—	5	$^1S - ^1P^\circ$	-1	-1	0,0	

B (III)

2067,88	—	2	$^3S -$	$^2P^\circ$	-1	0	0,0
2066,41	—	2		$^2P^\circ$	-1	-1	0,0

Al (II) ⁽¹⁾

6243,35	—	10	$^3P^\circ - ^3D$	-1	0	13,0	$\Delta R = 2.$
6231,76	—	6	$^3P^\circ - ^3D$	-1	-1	13,0	
2816,18	—	20	$^1P^\circ - ^1S$	+1	+1	7,4	
2669,17	—	10	$^1S - ^3P^\circ$	-1	-1	0,0	
2631,55	—	7	$^1D - ^1F^\circ$	-1	-1	10,5	
1989,80	—	8	$^1P^\circ - ^1D$	-1	-1	7,4	
1962,48	—	20	$^3P^\circ - ^3S$	+1	+1	4,63	
1858,13	—	5	$^3P^\circ - ^3S$	+1	0	4,63	
1856,00	—	8	$^3P^\circ - ^3S$	+1	-1	4,63	
1671,00	—	10	$^1S - ^1P^\circ$	-1	-1	0,0	

⁽¹⁾ Véase memorias citadas a propósito del Hg, página 147.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
Al (III) ⁽¹⁾							
1862,90	—	10	$^2S - \left\{ \begin{array}{l} ^2P^\circ \\ ^2P^\circ \end{array} \right.$	$^2P^\circ - 1$	0	0,0	
1854,67	—	10		$^2P^\circ - 1$	-1	0,0	
In (II)							
2941,24	—	8					
Columna III (b)							
Sc (II)							
5526,81	8	3	$^1G - ^1F^\circ$	+1	+1	1,76	
5031,03	7	4	$^1D - ^1P^\circ$	+1	+1	1,35	
4246,85	10	10	$^1D - ^1D^\circ$	0	+1	0,37	
3651,83	10	10	$\left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	$^3F^\circ - 1$	0	0,0	
3642,81	10	10		$^3F^\circ - 1$	-1	0,0	
3630,75	10	10		$^3F^\circ - 1$	-1	0,0	U.
3613,83	10	10		$^3F^\circ - 1$	-1	0,02	U.
3580,98	10	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \end{array} \right.$	$^3P^\circ + 1$	+1	0,02	
3572,57	10	10		$^3P^\circ + 1$	+1	0,0	
3368,97	10	8		$^3P^\circ + 1$	+1	0,0	
3361,97	10	8		$^3P^\circ + 1$	+1	0,0	
3361,32	10	8		$^3P^\circ + 1$	0	0,0	
3359,69	10	10		$^3P^\circ + 1$	0	0,0	
3353,75	10	10	$^1D - ^1F^\circ$	-1	-1	0,37	
Y (II)							
5662,95	9R	10	$^1G - ^1F^\circ$	+1	+1	1,94	
5205,71	10	10	$\left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	$^3F^\circ$	0	1,03	
5200,41	10	—		$^3F^\circ$	0	0,99	
5087,42	10	10	$^3F - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	$^3F^\circ$	0	1,08	
4900,11	10	10		$^3D^\circ + 1$	+1	1,03	U.
4883,69	10	10	$\left\{ \begin{array}{l} ^3D^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	$^3D^\circ + 1$	+1	1,08	U.
4374,95	10	10		$^3D^\circ$	0	0,41	
4177,52	10	10	$^1D - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3D^\circ \end{array} \right.$	$^3F^\circ - 1$	0	0,41	$\Delta R = 2.$
3982,60	10	10		$^3D^\circ$	+1	0,18	$\Delta R = 2.$
3788,69	9	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \\ ^3F^\circ \end{array} \right.$	$^3F^\circ - 1$	-1	0,10	
3774,33	10	10		$^3F^\circ - 1$	-1	0,13	U.
3710,30	10	10		$^3F^\circ - 1$	-1	0,18	U.
3633,13	10	10	$^1S - ^1P^\circ$	-1	-1	0,0	2c.
3600,73	10	10	$^3D - ^3D^\circ$	0	0	0,18	U.
3327,88	10	10	$^1D - ^1F^\circ$	-1	-1	0,41	
3242,28	10	10	$\left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \end{array} \right.$	$^3P^\circ + 1$	+1	0,18	
3216,68	10	10		$^3P^\circ + 1$	+1	0,13	
3203,32	7	10	$^3D - \left\{ \begin{array}{l} ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \\ ^3P^\circ \end{array} \right.$	$^3P^\circ + 1$	+1	0,10	
3200,26	7	10		$^3P^\circ + 1$	0	0,13	
3195,61	8	10		$^3P^\circ + 1$	0	0,10	
2460,58	2	4	$^3P^\circ - ^3D$	-1	-1	3,02	
2422,20	4	6	$^1D - ^1P^\circ$	+1	+1	0,41	

(1) Memorias citadas, pág. 147.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Y (III)

2817,00	1	10	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,92	
2367,20	—	10	$^2D - ^2P^o$	+1	+1	0,09	
2327,30	—	5	$^2D - ^2P^o$	+1	0	0,0	

Grupo de las tierras raras

La (II)

4921,79	8	5	$^3F - \begin{cases} ^3G^o \\ ^3G^o \end{cases}$	-1	-1	0,24	
4899,91	9	4		-1	-1	0,0	
4429,90	10	10	$^3D - ^1D^o$	0	-1	0,23	$\Delta R = 2.$
4334,97	6	8	$^3F^o - ^1F$	0	-1	1,75	$\Delta R = 2.$
4333,80	10	10	$^1D - ^1D^o$	0	0	0,17	
4141,75	10	10	$^3D - ^3D^o$	0	+1	0,40	
4123,23	9	10	$^3D - ^3F^o$	-1	-1	0,32	
4086,71	10	10	$^3F - ^1D^o$	+1	0	0,0	$\Delta R = 2.$
4077,35	10	10	$^3D - ^3F^o$	-1	-1	0,23	
4025,87	6	4	$^3D - ^1P^o$	+1	+1	0,32	$\Delta R = 2.$
3995,75	10	5	$^1D - ^3F^o$	-1	0	0,17	$\Delta R = 2.$
3988,53	10	10	$^3D - \begin{cases} ^3D^o \\ ^3F^o \\ ^1F^o \\ ^3P^o \\ ^3P^o \\ ^3P^o \end{cases}$	0	0	0,40	
3949,10	10	10		-1	-1	0,40	
3376,32	4	3		-1	0	0,40	$\Delta R = 2.$
3344,56	8	7		+1	+1	0,23	
3337,49	8	10		+1	+1	0,40	
3265,65	6	4		+1	0	0,32	
3171,70	—	10					
2379,40	—	10					
2297,80	—	7					

Columna IV (a)

C (II)

4267,27	8	10	$^2D - \begin{cases} ^2F^o \\ ^2F^o \end{cases}$	-1	-1	18,0	$2e.$
4267,02	8	10		-1	-1	18,0	$2e.$
2837,60	4	8	$^2S - \begin{cases} ^2P^o \\ ^2P^o \end{cases}$	-1	-1	11,9	
2836,71	5	10		-1	0	11,9	
1335,72	—	10	$^2P^o - \begin{cases} ^2D \\ ^2D \end{cases}$	-1	-1	0,0	
1334,54	—	10		-1	-1	0,0	

Si (II)

6371,36	—	8	$^2S - \begin{cases} ^2P^o \\ ^2P^o \end{cases}$	-1	0	8,1	
6370,90	—	2		-1	-1	8,1	
6346,69	—	5	$^2P^o - ^2S$	+1	+1	10,0	
1533,55	—	10	$^2P^o - \begin{cases} ^2S \\ ^2S \end{cases}$	+1	+1	0,04	U.
1526,86	—	10		+1	0	0,0	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Sn (II)

3352,30	—	10	$^2D - \begin{cases} ^2F^\circ \\ ^2F^\circ \end{cases}$	— 1	— 1	7,25	2e.
3283,50	—	10		— 1	— 1	7,25	2e.

Pb (II)

5608,80	4	10	$^2S - ^2P^\circ$	— 1	— 1	7,35	U.
2203,50	3R	4R	$^2P^\circ - \begin{cases} ^2S \\ ^2S \end{cases}$	+ 1	+ 1	1,74	
1682,40	1	10		+ 1	0	0,0	

Columna IV (b)

Ti (II)

3761,32	9	10	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^2F \\ {}^2F \\ {}^2D^\circ \\ {}^2D^\circ \end{array}$	$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +1 \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +1 \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,57 \\ 0,60 \\ 0,60 \\ 0,57 \end{array}$	
3759,30	9	10					
3685,19	10R	10					
3383,77	8R	10	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^4G^\circ \\ {}^4G^\circ \\ {}^4G^\circ \\ {}^4G^\circ \end{array}$	$\begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array}$	$\begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,0 \\ 0,01 \\ 0,03 \\ 0,05 \end{array}$	$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} U. \\ U. \\ U. \\ U. \end{array}$
3372,80	10	10R					
3361,22	8R	10					
3349,44	9R	10R					
3349,04	6R	8R	${}^2F - {}^2G^\circ$	-1	-1	0,60	
3340,34	7	5	${}^4F - {}^4F^\circ$	0	0	0,11	
3322,94	8R	10	${}^4F - {}^4F^\circ$	0	0	0,15	
3321,70	5	5	${}^4P - {}^4S^\circ$	+1	0	1,22	
3261,60	4	10	${}^4P - {}^4D^\circ$	-1	-1	1,22	
3252,92	8	6	$\left\{ \begin{array}{l} {}^4F^\circ \\ {}^4F^\circ \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} +1 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,03 \\ 0,0 \end{array}$	
3241,99	7R	10					
3239,04	7R	6R	${}^4F - \left\{ \begin{array}{l} {}^4F^\circ \\ {}^4F^\circ \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,01 \\ 0,03 \end{array}$	
3236,58	7R	6R					
3234,52	8R	10R	${}^4F^\circ$	0	0	0,05	
3232,28	5	5	${}^2G - \left\{ \begin{array}{l} {}^2F^\circ \\ {}^2F^\circ \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} +1 \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{l} +1 \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1,11 \\ 1,12 \end{array}$	
3229,43	6	3					
3229,20	7	3	${}^4F - {}^4F^\circ$	0	-1	0,0	
3218,27	6	8	${}^2H - {}^2G^\circ$	+1	+1	1,57	
3190,87	7	10	${}^2D - {}^2F^\circ$	-1	-1	1,08	
3168,52	9	10	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^4D^\circ \\ {}^4D^\circ \\ {}^4D^\circ \\ {}^4D^\circ \end{array}$	$\begin{array}{l} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{l} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,15 \\ 0,12 \\ 0,05 \\ 0,03 \end{array}$	
3162,57	9	6					
3088,03	10	10R					
3078,64	10	8					
3075,22	9	4	${}^4D^\circ$	+1	+1	0,01	
3072,97	8	3	${}^4D^\circ$	+1	+1	0,0	
3072,11	8	3	${}^4D^\circ$	+1	0	0,03	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ti (II)

3071,24	5	3	$^4P - ^4P^\circ$	0	+1	1,17	$\Delta R = 2.$
3066,36	7	3	$^4F - \begin{cases} ^4D^\circ \\ ^4D^\circ \end{cases}$	+1	0	0,0	
3066,22	7	—		+1	+1	0,01	
2954,80	—	8	$^4G^\circ - ^2H$	—1	—1	4,28	
2941,99	1	4	$^4F^\circ - \begin{cases} ^4G \\ ^4G \end{cases}$	—1	—1	3,83	
2938,70	—	5		—1	—1	3,81	
2936,20	—	5		—1	—1	3,80	
2884,10	7	8	$^2G - ^2G^\circ$	0	0	1,12	
2841,94	8	4	$^2F - \begin{cases} ^2F^\circ \\ ^2F^\circ \end{cases}$	0	0	0,60	
2832,18	7	5		0	0	0,57	

Zr (II)

3698,17	6	10	$^2G - ^2G^\circ$	0	0	1,01	U.
3572,47	10	10	$^4F - \begin{cases} ^4G^\circ \\ ^4G^\circ \end{cases}$	—1	—1	0,0	
3496,21	10	10		—1	—1	0,04	
3483,53	5	8	$^2D - ^2P^\circ$	+1	0	1,75	
3481,16	8	10	$^2F - ^2G^\circ$	—1	—1	0,80	
3438,23	10	10	$^4F - \begin{cases} ^4G^\circ \\ ^4D^\circ \end{cases}$	—1	—1	0,09	
3410,25	8	8		+1	+1	0,41	
3394,64	1	2	$^4P - ^4D^\circ$	—1	0	1,20	
3391,98	10	10	$^4F - \begin{cases} ^4G^\circ \\ ^2F^\circ \end{cases}$	—1	—1	0,16	
3388,30	8	5		0	—1	0,0	
3387,87	7	5	$^2G - ^2F^\circ$	+1	+1	0,97	$\Delta R = 2.$
3357,26	8	4	$^4F^\circ$	0	0	0,0	
3306,27	5	8	$^4F^\circ$	0	0	0,04	
3284,71	8	4	$^4D^\circ$	+1	0	0,0	
3279,27	8	4	$^4F - \begin{cases} ^4F^\circ \\ ^4F^\circ \end{cases}$	0	0	0,09	
3273,05	8	9		0	0	0,16	
3165,98	6	3	$^4D^\circ$	+1	+1	0,16	
3138,67	6	4	$^4D^\circ$	+1	+1	0,09	
3054,84	5	4	$^2G - ^2G^\circ$	0	0	1,01	
3036,38	3	3	$^2D - ^4F^\circ$	—1	—1	0,56	
2968,96	5	3	$^4F - \begin{cases} ^4F^\circ \\ ^4D^\circ \end{cases}$	0	+1	0,46	$\Delta R = 2.$
2962,68	5	2		+1	+1	0,36	
2927,00	5	4	$^2G - ^2F^\circ$	+1	+1	1,75	
2844,58	4	4	$^4P - \begin{cases} ^4P^\circ \\ ^4P^\circ \end{cases}$	0	0	0,99	
2843,58	5	4		0	0	0,95	
2700,14	5	4	$^2F^\circ$	0	0	0,09	
2678,62	5	5	$^4F - \begin{cases} ^4F^\circ \\ ^4F^\circ \end{cases}$	0	0	0,16	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E P	Observaciones
	a	c					

Zr (II)

2630,90	4	2	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,56	
2571,41	6	8	$^4F - \begin{cases} ^4D^\circ \\ ^4D^\circ \\ ^4D^\circ \end{cases}$	+1	+1	0,09	
2568,87	5	6		+1	+1	0,16	
2567,64	5	6		+1	+1	0,0	
2457,43	4	4	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	0,56	

Hf (II) ⁽¹⁾

3719,27	15	25	$^4F - \begin{cases} 18^\circ \\ 21^\circ \end{cases}$	+1	+1	0,61	$^4D^\circ$
3569,03	20	30		+1	+1	0,78	$^4D^\circ$
3561,65	20	25					
3505,23	20	40	$^4F - 24^\circ$	+1	+1	1,03	$^4D^\circ$
3399,80	30	40	$^2D - 17^\circ$	-1	-1	0,0	$^4F^\circ; \Delta R = 2.$
3194,20	15	25	$^4F - 22^\circ$	0	-1	0,45	$^4F^\circ.$
3134,72	25	40	$^2D - 22^\circ$	-1	0	0,38	$^4F^\circ; \Delta R = 2.$
2820,23	20	50	$^2D - 27^\circ$	-1	-1	0,38	$^2F^\circ$
2773,37	20	50	$^4F - 32^\circ$	-1	-1	0,78	$^4G^\circ; U.$
2516,88	25	100					
2513,02	25	50					
2512,68	15	30	$^4F - 38^\circ$	-1	-1	0,61	$^4G^\circ$

Th (II)

4391,12	5	10					
4381,89	5	10					
4019,14	5	10					
3601,05	3	7					
3538,75	1	10					
3392,05	4	5					
3313,69	1	10					
3300,54	1	10					
3290,56	—	10					
2932,48	—	5					
2684,31	2	4					
2555,22	—	4					
2554,71	—	4					
2549,57	—	4					

(1) Véase memorias citadas sobre Hf (I) página 147.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Columna V (a)

N (II)

5679,50	—	7	$^3P^\circ$ —	3D	— 1	— 1	18,4
5675,90	—	6		3D	— 1	— 1	18,39
5666,60	—	7		3D	— 1	— 1	18,39
4643,10	—	5					
4630,50	—	10					
4621,40	—	5					
4613,90	—	4					
4607,17	—	5					
4601,50	—	5					
3995,00							

N (III)

4103,40	—	3	2S —	$^2P^\circ$	— 1	0	27,2
4097,30	—	2		$^2P^\circ$	— 1	— 1	27,2
991,60	4		$^2P^\circ$ —	2D	— 1	— 1	0,02
989,80	7			2D	— 1	— 1	0,0

Columna V (b)

V (II)

3125,80	8	2	5F —	$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,32	U. U. U.
3118,38	10R	10R		$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,33	
3110,71	8	10R		$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,35	
3102,30	10	10R		$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,37	
3093,13	4	10R		$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,39	
3067,11	6	5	3G —	$^3H^\circ$	— 1	— 1	1,79	$\Delta R = 2.$
3066,37	4R	1R	3H —	$^3I^\circ$	— 1	0	2,50	
2924,65	8	8R	5F —	$^5F^\circ$	0	0	0,37	
2924,02	8	8R		$^5F^\circ$	0	0	0,39	
2908,81	8	8R		$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,39	
2906,45	6	4R		$^3D^\circ$	+ 1	0	0,35	
2893,32	10	5R		$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,37	
2892,67	10	5R	5D —	$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,35	
2891,65	10	5R		$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,33	
2715,69	10	5		$^5F^\circ$	— 1	0	0,04	
2706,19	8	3R		$^5F^\circ$	— 1	— 1	0,03	
2700,96	10	5R		$^5F^\circ$	— 1	— 1	0,04	
2683,11	6	2	5D —	$^5D^\circ$	0	— 1	0,0	
2682,90	6	2		$^5D^\circ$	0	0	0,01	
2679,35	8	4		$^5D^\circ$	0	0	0,03	
2678,60	7	3		$^5D^\circ$	0	— 1	0,03	
2677,83	8	4		$^5D^\circ$	0	— 1	0,0	
2672,04	6	3		$^5D^\circ$	0	— 1	0,01	
2526,24	4	2						

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Nb (II)

3225,43	5	10	5F —	${}^5G^\circ$	—1	—1	0,29	U.
3194,95	5	10		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,32	
3163,37	5	10		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,37	
3130,79	8	10		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,44	
3094,20	10	10		${}^5G^\circ$	—1	—1	0,51	
2950,91	6	10		${}^5F^\circ$	0	0	0,51	
2927,82	8	10		${}^5D^\circ$	+1	+1	0,51	
2910,63	5	6		${}^5F^\circ$	0	—1	0,37	
2883,20	5	6		${}^5D^\circ$	+1	+1	0,44	

Ta (II)

2685,14	3	5					
2675,40	—	5					

Columna VI (a)

O (II)

4596,19	—	5					
4590,98	—	3					
4448,21	—	—					
4414,89	—	5					
4189,79	—	—					
4185,45	—	—					
4075,87	—	—					
3749,49	—	—					
3727,33	—	—					
3390,25	—	—					

Columna VI (b)

Cr (II)

2860,94	3	5	6D —	${}^6F^\circ$	—1	—1	1,47	
2855,66	4	10		${}^6F^\circ$	—1	—1	1,48	
2849,83	4	10		${}^6F^\circ$	—1	—1	1,50	
2843,25	5R	10R		${}^6F^\circ$	—1	—1	1,52	
2840,02	2	8						
2835,64	5R	10	6D —	${}^6F^\circ$	—1	—1	1,54	U.
2830,48	2	10						
2766,54	4R	10	6D —	${}^6P^\circ$	+1	+1	1,54	
2762,60	3	10		${}^6P^\circ$	+1	+1	1,52	
2751,87	3	10		${}^6P^\circ$	+1	0	1,52	
2750,73	3	10		${}^6P^\circ$	+1	0	1,50	
2697,91	2	5						
2691,05	4	10	6D —	${}^6D^\circ$	0	+1	1,54	$\Delta R = 2.$
2678,79	4	10		${}^6P^\circ$	+1	—1	1,48	
2677,17	5R	10		${}^6D^\circ$	0	0	1,52	
2672,83	3	6		${}^6P^\circ$	+1	+1	1,52	$\Delta R = 2.$

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Cr (II)

2671,82	3	8	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^4P^\circ \\ {}^4P^\circ \\ {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	+ 1	+ 1	1,50	$\Delta R = 2.$
2668,72	4	6		+ 1	+ 1	1,48	$\Delta R = 2.$
2666,03	4	8		0	— 1	1,50	
2663,43	4	5		0	— 1	1,52	

Mo (II)

3635,15	2	10	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \end{array} \right.$	— 1	0	0,08	U.
3524,65	2	7		— 1	— 1	0,0	
3175,03	1	5		— 1	— 1	0,03	
3121,99	2	10		— 1	— 1	0,08	
2923,40	4	10	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \end{array} \right.$	— 1	— 1	0,14	
2909,11	5	8		— 1	— 1	0,20	
2891,00	5	4	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6P^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,20	
2871,50	4	10		+ 1	— 1	0,0	
2863,80	1	8	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2853,19	1	10		0	0	0,08	
2848,21	5	10	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2816,15	5	10		0	0	0,08	
2807,73	3	6	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2785,00	2	8		0	0	0,08	
2769,76	—	5	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2701,42	2	10		0	0	0,08	
2687,98	1	8	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2684,13	3	10		0	0	0,08	
2683,22	2	8	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2681,40	—	6		0	0	0,08	
2673,28	1	5	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2672,84	2	10		0	0	0,08	
2660,58	2	10	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
2633,50	—	5		0	0	0,08	
2538,46	2	10	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6D^\circ \\ {}^6D^\circ \end{array} \right.$	0	0	0,14	
				0	0	0,08	

W (II)

3613,79	3	10					
2764,28	2R	8					
2722,69	2	6					
2679,60	1	6					
2658,02	2	8					
2589,20	2	8					
2572,30	—	6					
2569,26	2	5					
2563,10	1	5					
2488,77	2	6					
2397,11	2	10					

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	R. P	Observaciones
	a	c					

Columna VII (b)

Mn (II)

3495,84	5	6	5D —	${}^5P^\circ$	+ 1	— 1	1,85	W.
3488,69	4	10		${}^5P^\circ$	+ 1	0	1,84	W.
3482,92	4	10		${}^5P^\circ$	+ 1	0	1,83	W.
3474,14	4	10		${}^5P^\circ$	+ 1	+ 1	1,83	W.
3460,33	3	10		${}^5P^\circ$	+ 1	+ 1	1,80	W.
3442,00	5	10	5S —	${}^5P^\circ$	+ 1	+ 1	1,76	W.
2949,21	6	10		${}^5P^\circ$	— 1	— 1	1,17	W.
2939,31	6	10		${}^5P^\circ$	— 1	0	1,17	W.
2933,06	6	10		${}^5P^\circ$	— 1	+ 1	1,17	W.
2605,69	8R	10R		${}^7P^\circ$	— 1	+ 1	0,0	W.
2593,73	4R	10R	7S —	${}^7P^\circ$	— 1	0	0,0	U. W.
2576,12	5R	10R		${}^7P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U. W.
2452,52	2R	10		7D	— 1	— 1	4,8	W.
2437,50	—	5	${}^7P^\circ$ —	7D	— 1	— 1	4,75	
2427,96	—	4		7D	— 1	— 1	4,72	
2427,77	—	4		7D	— 1	0	4,72	

Columna VIII

He (II)

4685,81	7	$4R \left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right]$	48,13	Tubo Geissler
1640,50	6	$4R \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right]$	40,61	"
303,80	2	$4R \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right]$	0,0	"

Grupo del Fe

Fe (II)

2755,74	8	10	4D —	${}^4F^\circ$	— 1	— 1	0,98	U.
2749,32	7	10		${}^4F^\circ$	— 1	— 1	1,03	U.
2746,49	7	10		${}^4F^\circ$	— 1	— 1	1,07	
2743,20	6	8		${}^4F^\circ$	— 1	— 1	1,09	
2739,55	9	10	6D —	${}^4D^\circ$	0	0	0,98	U.
2631,33	6	3		${}^6D^\circ$	0	— 1	0,08	
2631,05	6	4		${}^6D^\circ$	0	— 1	0,10	
2628,30	6	8		${}^6D^\circ$	0	— 1	0,12	
2625,68	4	3	4D —	${}^6D^\circ$	0	— 1	0,05	
2613,84	8	8		${}^6D^\circ$	0	+ 1	0,10	
2611,88	8	10		${}^4P^\circ$	+ 1	— 1	1,07	
2607,10	7	10		${}^6D^\circ$	0	+ 1	1,03	$\Delta R = 2.$

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Fe (II)

2599,40	6	10		${}^6D^\circ$	0	0	0,0	
2598,38	7	8	6D —	${}^6D^\circ$	0	+1	0,05	
2585,88	7	10		${}^6D^\circ$	0	+1	0,0	
2562,64	5	5	4D —	${}^4P^\circ$	+1	+1	0,98	
2484,19	6	—	4F —	${}^6F^\circ$	0	0	0,23	L. $\Delta R = 2$.
2413,31	6	3		${}^6F^\circ$	—1	—1	0,12	
2410,53	6	5		${}^6F^\circ$	—1	—1	0,10	
2406,65	6	4	6D —	${}^6F^\circ$	—1	0	0,10	
2404,89	6	6		${}^6F^\circ$	—1	—1	0,08	
2395,68	8	4		${}^6F^\circ$	—1	—1	0,05	U.
2382,04	8	10		${}^6F^\circ$	—1	—1	0,0	U.
2348,13	—	5	4F —	${}^4D^\circ$	+1	+1	0,23	
2343,50	2	7	6D —	${}^6P^\circ$	+1	+1	0,0	
2332,80	2	6		${}^6P^\circ$	+1	+1	0,05	

Ru (II)

2976,58	4	10					
2965,55	3	10					
2945,67	3	10					
2712,40	4	10					
2692,10	5	10					
2678,73	4	10					

Grupo del Co

Co (II)

2694,68	2	8	3F —	${}^5G^\circ$	—1	—1	10,65	$\Delta R = 2$.
2663,53	4	10	3F —	${}^5G^\circ$	—1	—1	10,54	$\Delta R = 2$.
2614,31	—	6	5P —	${}^5S^\circ$	+1	+1	2,19	
2582,20	—	10	3F —	${}^3G^\circ$	—1	—1	10,72	
2580,33	4	10	3F —	${}^3G^\circ$	—1	—1	10,54	
2519,80	1	10	3F —	${}^3F^\circ$	0	0	10,65	
2420,70	—	6	—	—	—	—	—	
2388,90	2	10R	5F —	${}^5F^\circ$	0	0	0,41	U.
2378,62	3	10	5F —	${}^5F^\circ$	0	+1	0,41	U.
2363,80	2	10	5F —	${}^5D^\circ$	+1	0	0,49	
2311,60	—	6	5F —	${}^5G^\circ$	—1	—1	0,49	
2307,90	2	6R	5F —	${}^5G^\circ$	—1	—1	0,56	
2286,20	2	6R	5F —	${}^5G^\circ$	—1	—1	0,49	U.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Grupo del Ni

Ni (II)

2545,92	1	6	2F —	${}^4G^\circ$	—1	—1	1,85	$\Delta R = 2.$
2510,89	4	10		${}^4G^\circ$	—1	—1	1,67	$\Delta R = 2.$
2437,90	2	10		${}^4F^\circ$	0	—1	1,67	$\Delta R = 2.$
2416,14	2	10		${}^2G^\circ$	—1	—1	1,85	U.
2394,56	2	10		${}^2G^\circ$	—1	—1	1,67	
2375,43	1	8	4F —	${}^2F^\circ$	0	0	1,67	
2316,04	2	6		${}^4D^\circ$	+1	+1	1,04	U.
2302,97	2	4		${}^4D^\circ$	+1	+1	1,15	U.
2287,10	10	40R		2F — ${}^2D^\circ$	+1	+1	1,85	U.
2270,24	1	4		${}^4G^\circ$	—1	—1	1,15	
2264,45	1	4	4F —	${}^4G^\circ$	—1	—1	1,23	
2253,90	5	20R		${}^4G^\circ$	—1	—1	1,31	

Pd (II)

2854,60	2	10	2F —	${}^4G^\circ$	—1	—1	4,0	$\Delta R = 2.$
2658,74	2	10		${}^4F^\circ$	0	—1	4,0	$\Delta R = 2.$
2505,72	2	10		${}^2G^\circ$	—1	—1	4,25	
2498,79	3	10		${}^2G^\circ$	—1	—1	4,0	
2488,92	4	10	4F —	${}^4D^\circ$	+1	+1	3,1	
2435,33	1	10	2F —	${}^2F^\circ$	0	0	4,0	
2433,11	2	10	2G —	${}^2H^\circ$	—1	—1	5,5	
2430,95	2	8	4F —	${}^4G^\circ$	—1	—1	3,7	
2426,87	1	10		${}^4D^\circ$	+1	+1	3,56	
2424,48	2	8		${}^4D^\circ$	+1	+1	3,70	
2351,88	1	4	2G —	${}^2F^\circ$	+1	+1	5,5	
2351,34	1	7	4F —	${}^4G^\circ$	—1	—1	3,34	
2296,52	3	5		${}^4G^\circ$	—1	—1	3,10	

3. En las tablas III y IV se hace una estadística de los niveles fundamentales que dan origen a las líneas últimas; y en la tabla V se resumen las dos tablas precedentes. Finalmente en la tabla VI figura una estadística completa referente a todas las líneas últimas.

TABLE III
Átomos neutros. Niveles fundamentales

Columna	S	S°	P	P°	D	D°	F	F°	G	G°	?	°	X
I	33	—	—	32	13	—	—	—	—	—	—	—	4
II	14	1	—	95	7	—	—	—	—	—	—	—	2
III	2	—	—	31	11	—	6	—	1	—	—	—	—
Tierras raras .	—	—	—	—	3	—	2	—	—	—	—	—	83
IV	7	—	38	—	11	—	43	—	—	—	—	—	15
V	—	17	2	13	5	35	9	—	—	—	—	—	29
VI	28	12	14	—	19	—	—	—	—	—	1	—	22
VII	10	—	2	11	11	—	—	—	—	—	—	—	8
VIII	8	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	9	—
Grupo del Fe	—	—	—	1	23	—	28	—	—	—	5	—	24
Grupo del Co	—	—	—	1	12	—	50	—	4	—	—	—	25
Grupo del Ni	1	—	—	3	42	2	7	5	—	1	7	3	3

TABLE IV
Átomos ionizados. Niveles fundamentales

Columna	S	S°	P	P°	D	D°	F	F°	G	G°	H	?	°	X
I	—	—	—	1	25	—	1	1	—	—	—	2	—	4
II	18	—	—	26	2	—	—	—	—	—	—	—	—	3
III	9	—	—	9	29	—	5	—	2	—	—	1	—	—
Tierras raras .	—	—	—	—	13	—	3	1	—	—	—	—	—	3
IV	5	—	4	7	12	—	58	3	8	—	1	—	—	17
V	2	—	—	5	9	—	21	—	1	—	1	—	—	10
VI	—	—	—	—	28	—	—	—	—	—	—	—	—	38
VIII	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—
Grupo del Fe	—	—	—	—	24	—	2	—	—	—	—	—	—	6
Grupo del Co	—	—	1	—	—	—	11	—	—	—	—	—	—	1
Grupo del Ni	—	—	—	—	—	—	23	—	2	—	—	—	—	—

TABLE V
Número de niveles fundamentales

Niveles	Átomos neutros	Átomos ionizados
S	103	34
S°	30	—
P	56	5
P°	191	48
D	157	142
D°	37	—
F	145	124
F°	5	4
G	5	13
G°	1	—
H	—	5
H°	—	—
?	13	2
°	12	1
X	215	82

Del exámen del cuadro precedente resulta que los niveles pares tienen prioridad como niveles iniciales, puesto que.

Átomos neutros	$\Sigma l = 2n$:	479 líneas
» »	$\Sigma l = 2n + 1$:	276 »
» ionizados.	$\Sigma l = 2n$:	325 »
» »	$\Sigma l = 2n + 1$:	53 »

El cuadro VI contiene, distribuídas de acuerdo con sus características, la totalidad de las líneas últimas, que alcanzan a 1430.

TABLA VI

Líneas últimas	Átomos	
	Neutros	Ionizados
Clasificadas	730	375
Parcialmente clasificadas	25	3
Sin clasificar	215	82
Número total de líneas últimas	970	460

4. *Conclusiones.* — Se publica una tabla completa de las líneas últimas incluyendo todos los datos numéricos que han podido obtenerse hasta la fecha. En dicha tabla figuran las siguientes características: longitudes de onda, intensidades en el arco y en la chispa — en algunos casos en el tubo de Geissler — las series espectrales con sus características; las referencias concernientes a los resultados obtenidos por Gramont y otros autores en esta materia, y, finalmente, se mencionan: a) las líneas últimas que aparecen en los espectros de la llama descriptos por Wateville y por Gramont en el soplete oxiacetilénico y b) las líneas obtenidas por la fulguración eléctrica de las soluciones según los resultados obtenidos por Pollok y Leonard y por el autor.

Buenos Aires, Julio de 1938.

LA CORDILLERA PAYNE

POR GUSTAVO A. FESTER

En distintos puntos de la cordillera patagónica se notan, avanzados como centinelas hacia el este, potentes estoques lacolíticos, desde el Cerro San Lorenzo hasta el Monte Svea en Tierra del Fuego. Estos lacolitos, de edad infraterciaria, podemos considerarlos probablemente como apófisis del gran batolito patagónico, como ha sido comprobado por Feruglio ⁽¹⁾ en el caso del Fitz Roy, compuesto de la misma roca granodiorítica, mientras que los otros cerros demuestran en parte una variedad bastante grande de rocas ácidas y básicas, es decir que representan una fase marginal de diferenciación del magma primitivo.

La acumulación mayor de tales cerros la encontramos en la comarca del Seno de la Ultima Esperanza, los estoques del Payne, Ferrier, Donoso y Balmaceda. Al oeste del último, desde el fjord, he observado por lo menos uno o dos cerros más, los cuales, por la forma de sus torres fantásticas revelan que pertenecen igualmente a la fila de los lacolitos. Los estoques de la zona en mención ya han sido examinados por Steinmann y Hauthal y especialmente Quensel ⁽²⁾ ha estudiado prolijamente las rocas del Balmaceda, Donoso y Payne, encontrando en el primero, principalmente monzonitas; en el segundo diorita cuarcífera y granito en el último. En enero del año 1937 he tenido la oportunidad de efectuar una breve visita al pie del Cerro Payne Este ⁽³⁾, mientras que los señores Zuck y Teufel del Club Alpino Alemán efectuaron la primera as-

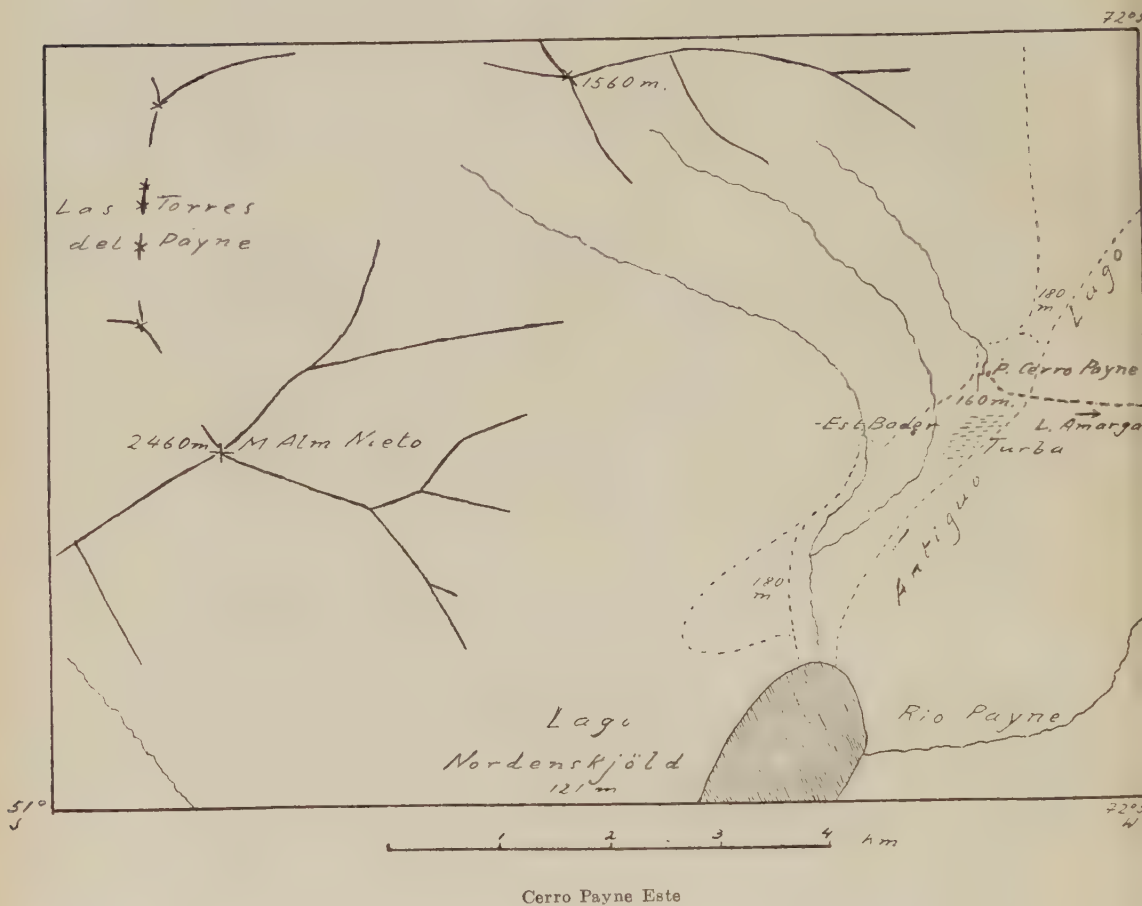
(1) Artículo de I. COUCI en Revista Minera, VII, pág. 76 y 97 (1935).

(2) Bull. of the Geol. Inst. of Upsala, II, pág. 1 (1911).

(3) Con los Sres. Dr. R. JAKOB, de Buenos Aires; ST. ZUCK, de Munich, y H. TEUFEL, de Nuremberg. A los Sres. Almirante FRANCISCO NIETO (Viña del Mar) y D. SÓCRATES AGUIRRE, Cónsul General de Chile en Buenos Aires, agradecemos las recomendaciones a las autoridades chilenas.

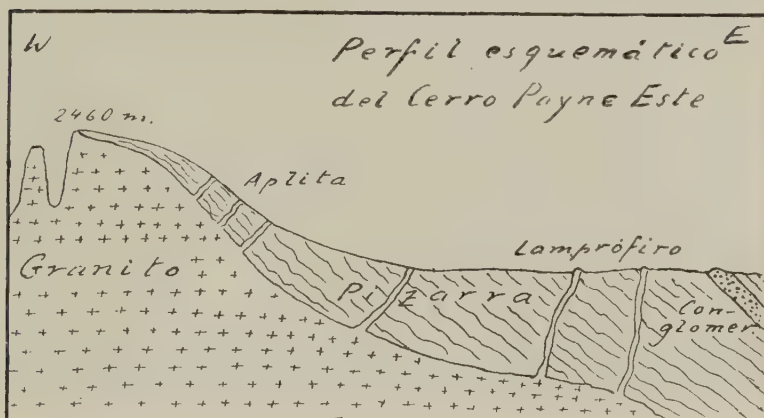
censión a esta cumbre, bautizándola con el nombre de «Monte Almirante Nieto».

La Cordillera Payne es el más grande y más avanzado de los estoques lacolíticos. Abarca unos 320 km², semejándose a un castillo



medieval gigantesco, no solo por sus torres pintorescas, sino por la serie de lagos que a manera de fosa la rodean; son en el norte y sur, los lagos Dickson, Nordenskjöld y Pehue, reunidos por el Río Payne, y el lago Gray al suroeste, de modo que solo al oeste-noroeste existe una coherencia con la cordillera principal. La Cordillera Payne, con sus numerosas cimas y torres, por un valle hondo, está dividida en una sección occidental y otra oriental. La primera, con el cerro principal, de forma característica de una montura, alcan-

za hasta 3246 m (3050 según otra indicación), mientras que la altura del Payne Este, de forma más bien trapezoédrica, por mis compañeros, ha sido determinada en 2460 m (Monte Almirante Nieto). A veces los autores hablan también de un «Cerro Payne Medio», pero las distintas torres de menor altura que lo constituyen, se consideran mejor como formando parte del macizo oriental. Por fin, las tres o cuatro «Torres del Payne» en sentido estricto, afamadas por las reproducciones fotográficas, son aquellas que se apoyan igualmente contra el Payne Este, pero prolongándolo en dirección NE, como surge del plano.



Quensel supone una edad posteretácea para la penetración, puesto que el plegamiento de los estratos devonianos parece previo a aquélla. Por otra parte, siendo la erosión muy avanzada, sostiene que el magma penetró en el terciario inferior. La roca intrusiva principal es un granito blanco, biotítico (superficialmente amarillento en las paredes rocosas), que encontré también en los bloques acarreados desde el circo entre Payne Este y sus torres. Este granito ha abovedado, y hasta cierto grado metamorfoseado la capa de pizarra senoniana (estratos de Inoceramus), la que se conserva todavía en varias partes, como por ejemplo del lado sur y este del «Almirante Nieto», alcanzando esta roca hasta la cumbre misma. El grado de metamorfosis es algo flojo y más bien físico que químico; el aspecto de esta pizarra filítica de color negro, a veces superficialmente alterado hacia el colorado, recuerda el de la roca de Ushuaia y no difiere mucho de las pizarras suprasenonianas normales de la Cordillera Prat. Solamente la cuarta torre lleva una «gorra» negra como

tinta, lo que demuestra una semifusión hasta roca córnea por el contacto, aunque la estratificación está todavía conservada (véase la foto).

Además mis compañeros trajeron de la cumbre más alta del « Almirante Nieto » una muestra de color verdoso y superficie áspera. Apparently se trata en este caso de una arenisca arcillosa metamorfoseada, sea de un banco intercalado o sea del horizonte más profundo del cretáceo, de la base concordante de las pizarras.



FIG. 1. — Monte Balmaceda desde el seno de la Ultima Esperanza. Lacolito de roca monzonítica. (Foto Dr. R. Jakob).

Paralelamente con la estratificación de la pizarra se notan en los cerros vetas múltiples, que según Quensel consisten en pórfido granítico y aplita. Tales vetas (filones-capas) anchas, aplíticas (una prueba demuestra el cuarzo « idiomórfico » característico) se notan también en la foto, en el lugar donde mis compañeros efectuaron la ascensión. En otros lugares, en la pared sur del cerro, se puede observar, como, las vetas desde la parte rocosa continúan como « Härtlinge » en la pendiente más suave de escombros. Si así en media altura del cerro vemos la parte ácida de las schizolitas, la parte básica, pesada se nota en el antepaís más abajo. Aproximadamente a un km de distancia desde el pie del cerro aparece un « Härtling » de roca gris oscura, lamprofírica, una spessartita de plagioclasa con hornblenda parda; este filón-capa corre más o menos en dirección SW-NE, paralelamente con los estratos sedimen-

tarios. Quensel describe también vetas de essexita en el antepaís, pero las que no se notan al pie del « Almirante Nieto ». Algo de mineralización (pirita) he visto cerca de la quebrada, donde sale el arroyo que viene del circo y relativamente rica parece otra veta con antimonio, que se encuentra más cerca del Payne Oeste.

El carácter de la pizarra, negra o bandeada, en la quebrada mencionada ya es casi normal. Hacia afuera sigue todavía un plegamiento bastante fuerte (con el eje SW-NE hasta submeridional de



Fig. 2. — Cerro Payne Este (Monte Almirante Nieto) y Torres del Payne desde la Laguna Amarga.

acuerdo con el empuje general desde el W), lo que se nota en la quebrada del Río Payne, cerca del puente colgante del camino a Laguna Amarga; recién a partir de la Cordillera Prat hacia afuera, las ondulaciones se vuelven más suaves. Uno de los « Härtling » cerca del camino al oeste del puente, que demuestra igualmente una inclinación fuerte hacia el E, consiste en un conglomerado similar a el que forma los estratos de la cueva del Gryppotherium.

Morfológicamente notamos la influencia de la roca sedimentaria de tal manera, que la figura hongueiforme del lacolito en cierto grado ha sido conservada en la periferia, donde los estratos, siempre más potentes hacia afuera, de la pizarra dura, químicamente poco atacable, han desplegado su efecto protector. Naturalmente, la pendiente pizarrosa, de unos 50° de inclinación, está surcada por canaletas múltiples entre crestas afiladas, pero sin que la erosión

por el agua de lluvia o nieve derretida llegara todavía al núcleo granítico. Hacia la cúspide del lacolito, en contraposición, la capa pizarrosa, en sí más delgada, en muchas partes ya está eliminada, de modo que la erosión en el material magmático, químicamente muy atacable, podía trabajar hacia la profundidad. La dirección de este trabajo erosivo por lo general era casi perpendicular, es decir una erosión sin mayor denudación, lo que se explica por los hechos de que el plano primitivo de ataque era casi horizontal, que el granito en sí

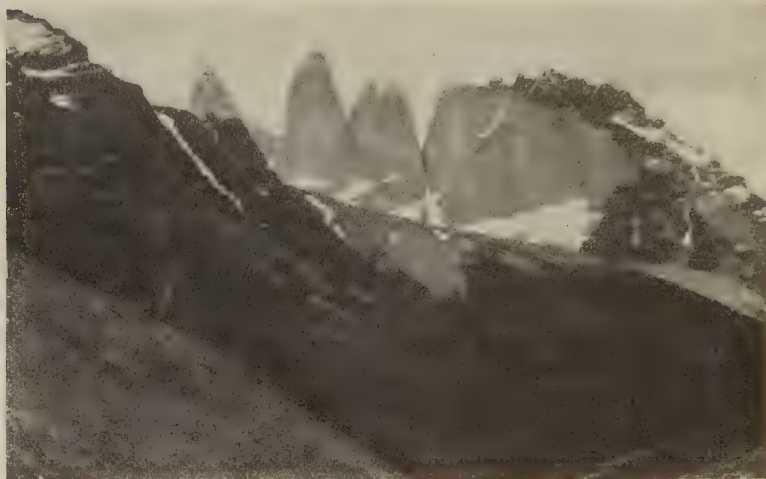


FIG. 3. — Las Torres del Paye y la cresta N.E. del Monte Almirante Nieto. A la izquierda vetas de aplita en la pizarra oscura. (Foto del Dr. R. Jakob).

ya tiende a un agrietamiento vertical que las aristas, por los restos de la capa pizarrosa, estaban protegidas contra un amortiguamiento; el fenómeno en total es comparable a el de la formación de columnas en material terroso y loésico. Así se explica la descomposición de la forma primitiva del lacolito en este número grande de paredes y torres maravillosas; por ejemplo, las tres «torres» centrales del Paye. Estas tienen por todas partes paredes prácticamente verticales, mientras que la cuarta, exterior, del lado NE está todavía achatada por su cubierta de pizarra córnea. Las tres primeras, podemos considerarlas como una clase de montes «testigos», estando ya eliminado el material rocoso entre ellas y el macizo principal, quedando un circo o «caldera» tan profunda que la gente de la zona habla de un «cráter».

La glaciación actual de la Cordillera Paye es muy modesta, no

solo en comparación con la pleistocénica, sino también se notan en la caldera indicios de una regresión muy reciente; solo inmediatamente debajo de las torres quedan todavía restos de un glaciar mayor. En las paredes del macizo mismo del « Almirante Nieto », fuera de las canaletas con « firn » y hielo, observamos algunos glaciares colgantes y uno que se podría considerar del tipo « regenerado », en el surco entre la pared oriental y el zócalo que es de formas más suaves.

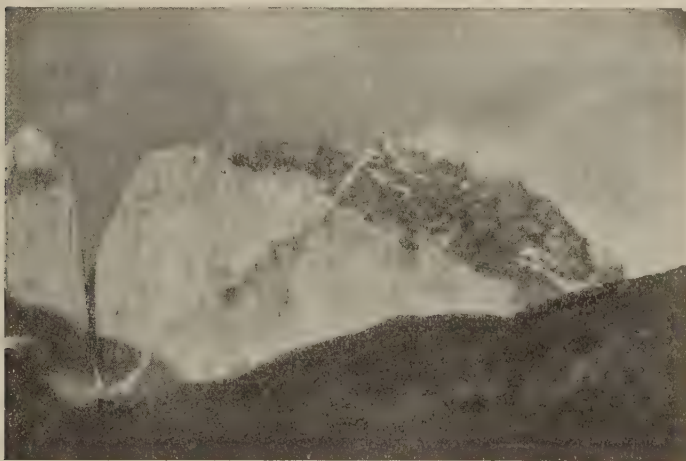


Fig. 4. — Tercera y cuarta torre del Payne. Granito claro con « gorra » de roca córnea.

La determinación del límite de nieve resulta algo difícil, por el deslizamiento del « firn » y hielo en las canaletas de inclinación fuerte, pasando hacia debajo del límite « natural ». Sin embargo, la altura de la primera terraza casi horizontal, cubierta de nieve, fué determinada en 1250 m, por los señores Zuck y Teufel, de modo que podemos aceptar esta altura como límite aproximado.

La glaciación pleistocénica, en la latitud del Payne, se extendía según Caldenius ⁽⁴⁾, en la época inicioglacial, por la depresión del Río Coyle casi hasta el meridiano 71, quedando después del regreso, endicado por morenas « gotiglaciales », un lago grande hasta el meridiano 72, y luego, por el endicamiento « finiglacial », varios la-

⁽⁴⁾ *Las glaciaciones cuaternarias en la Patagonia y Tierra del Fuego*, Dir. Gen. de Minas y Geología. Publicación N° 95, 1932.

gos de menor tamaño. A estos pertenecía, fuera del lago Sarmiento y de la Laguna Azul (algo mayores que en la actualidad), uno bastante extenso, que abarcaba el Lago Nordenskjöld y la Laguna Amarga. Con la sequía progresiva del clima, las partes de fondo relativamente elevado de este lago quedaron en seco, vaciándose además, por fin, las cuencas superiores hacia el Lago Nordenskjöld, sea directamente por una brecha de erosión o sea indirectamente por el Río Payne. Las últimas fases del lago seco, que se notan por las te-

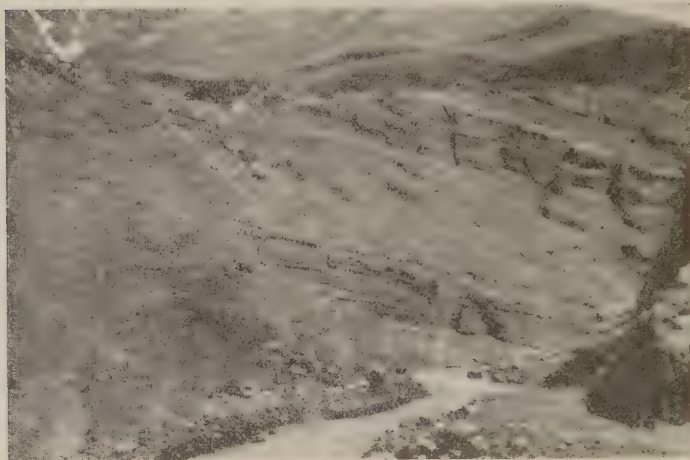


Fig. 5. — Quebrada al pie del monte Almirante Nieto, con pizarra cretácea.

rrazas al pie ESE del Payne, están indicadas en el croquis; fuera de la Laguna Amarga, hoy, no queda más que una laguna residual, chica, cerca del Puesto Payne, donde la turbera remanente se adosa contra la terraza, y otra un poco más al norte. El fondo turboso y el plano del Puesto Payne, que corresponde a la última fase del lago seco, lo he determinado en 150-160 m de altura y el fondo de la fase anterior, las terrazas más al norte y más al sureste, en 180 m, mientras que el espejo del Lago Nordenskjöld actualmente se encuentra en 121 m sobre nivel del mar. La forma algo curiosa de todas estas cuencas de lagos, es decir la extensión « periférica » de las lenguas del antiguo glaciar piedmont en su última fase, se relaciona probablemente con la dirección general de los estratos NE - SW, a la cual la extensión del hielo y el trabajo erosivo se produjo más o menos paralelamente.

La regresión del hielo que del lado E y S del Payne se nota tan fuertemente, está relacionada con una cierta sequía del clima. Podemos considerar el Payne como un límite climático de primer orden e indudablemente hay que corregir al respecto el mapa de Knoche ⁽⁵⁾ cuya línea de pluviosidad de 3000 mm pasa aproximadamente por la pendiente E del macizo del Payne. No existen medidas exactas pero según las indicaciones de la gente de la zona, la pluviosidad sería menor que en Magallanes, donde no hay más que unos 500



FIG. 6. — Veta lamprofírica en el antepaís del cerro Payne.

mm. Además, el carácter medio xerófito de la vegetación ya nos indica la cercanía de la zona estépica, pasando el límite horizontal de los bosques, ya pobres al pie del macizo, más o menos por la orilla del Río Payne y encontrándonos cerca de la Laguna Amarga ya en plena estepa patagónica. Esta, forma una clase de lengua avanzada hacia el W, que corresponde al promontorio de la alta cordillera, avanzando hacia el Este o sea el maciso de la Cordillera Payne. El Payne actúa entonces como un segundo condensador detrás del hielo patagónico, el que ya por sí solo en la latitud del grado 51 tiene un máximo de extensión transversal, de modo que el antepaís al ESE del Payne reciba una cantidad muy pequeña de precipitaciones. La cumbre del «Almirante Nieto» frecuentemente

⁽⁵⁾ *Zeitschrift d. Gesellschaft f. Erdkunde z.*, Berlín, 1929, pág. 208.

está despejada por completo, mientras que se notan acumulaciones de nubes en la punta del Payne Oeste y la comarca del Balmaceda, al mismo tiempo queda totalmente envuelta. Teniendo en cuenta, que asínisma Magallanes se encuentra sobre el límite de los bosques, podemos suponer, que la isohieta de 500 mm valga también para el pie del Payne Este.

A la escasez de la vegetación contribuye todavía, fuera de factores pedológicos, la evaporación viva con relación a la fuerza del

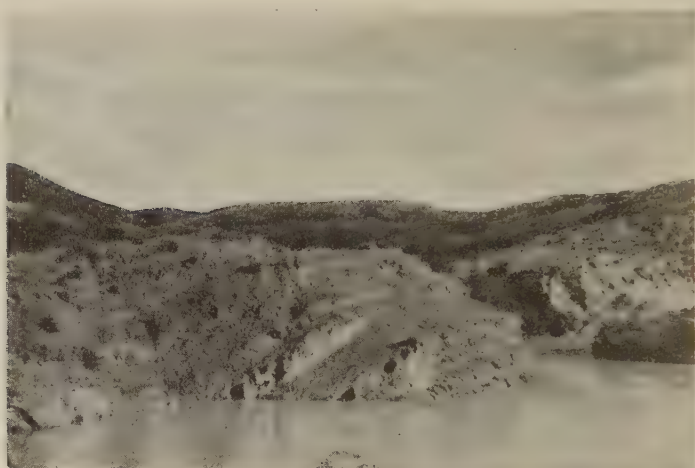


FIG. 7. — La quebrada del río Payne con pizarra cretácea.

viento del cuadrante W, aunque el Payne mismo protege hasta cierto grado, por ejemplo en comparación con la comarca del Río Toro. Por otra parte, el huracán que se levanta por la tarde, cerca de la cumbre del « Almirante Nieto », es tan fuerte, que casi se produce un accidente fatal a mis compañeros, proyectándolos por algunos metros.

Las nubes, de tipos cumulus, en estos días de calma relativa en la parte baja, quedaron estiradas en forma de aeronaves fantásticas una vez que alcanzaron a mayores alturas. Cerca del puesto mismo a veces se producía un viento de compensación desde el E, es decir, en total, hay una turbulencia enorme de la atmósfera en toda esta zona, la que fué también la causa del accidente fatal del aviador Plüschow en 1931.

Las pendientes de los contrafuertes E del Payne (Cota 1560),

tienen, fuera de un poco de *Nothofagus betuloides*, todavía bastante de *N. Pumilio*, árbol algo exigente en cuanto al suelo, es decir, ni crece en roca o escombros, ni en suelos turbosos. Por lo demás predomina *N. antarctica*, tanto sobre el terreno de escombros y morenas al pie de la cresta NE, donde mis compañeros iniciaron la ascensión, como cerca del Puesto Payne en el terreno rocoso o turboso, volviéndose los árboles ya paulatinamente enanos. Mientras que *Nothofagus Pumilio* solo raras veces toma la forma enana, la especie

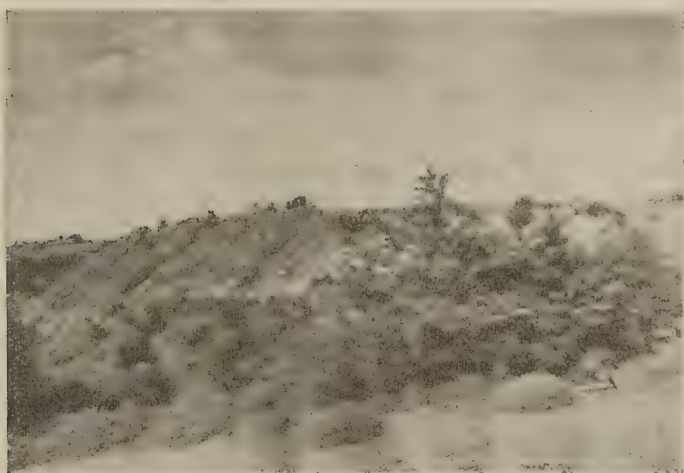


FIG. 8. — Estrato de conglomerado cretáceo en el antepaís del cerro Payne.

antarctica, arbustera, por lo general constituye el borde superior de la selva, notándose éste en líneas zig-zag con relación a los surcos de la pendiente y prefiriéndose para subir el lado oeste de ellos, por ser protegido contra el viento. En el pie de escombros del Payne mis compañeros encontraron un límite superior de la selva de 550 m y de 600 m para la forma arbustera, pero para pendientes más suaves de la zona se puede suponer un límite de 800 m sobre el nivel del mar, de acuerdo con mis mediciones en la Cordillera Prat, vecina.

En cuanto a la otra flora, el calafate cerca del puesto ya indica una comarca relativamente seca, como igualmente la divulgación del cardo intruso. Entre las plantas herbóreas notamos entre otras alverjillas, *Viola tridentada*, *Pernettya mucronata* y *Calceolaria nana*. En la turbera faltan los musgos del género *Sphagnum*, que necesitan aparentemente un cierto movimiento del agua; aquí se trata

de *Brachythecium turgens* y un *Bryum* ⁽⁶⁾ en mezcla con gramíneas, ciperáceas, juncáceas, etc.

Por la violencia del viento y la falta de suelo apropiado, la agricultura en casi toda la zona chilena no es posible y solamente en pocos lugares como cerca de la ciudad de Magallanes se cultiva algo de avena como forraje. Donde hay protección contra el viento, natural o artificial por planchadas, se cultivan hortalizas para el consumo propio, así como en el Puesto Cerro Payne: papas, repollo, lechuga y zanahorias. La vida económica ⁽⁷⁾ se cubre por completo con la cría de animales, especialmente de lanares. El terreno es casi siempre de propiedad fiscal y arrendado a grandes compañías. Del lado norte de la Cordillera Payne hay algunos pequeños arrendatarios en la orilla del Lago Dickson, mientras que en la zona sur y este se reparten la Cía. Río Payne (60-70.000 lanares), las estancias pequeñas Pudeto y Baader y la estancia grande Cerro Guido (60.000 lanares) que pertenece a la Cía. Explotadora de Tierra del Fuego. En el Puesto Cerro Payne de esta última compañía, hay uno o dos ovejeros que cuidan de los animales, es decir las más grandes estancias se conforman con unos veinte hombres de personal fijo, elevándose este número solamente en la época de esquila a unos cincuenta aproximadamente.

(6) La determinación de los musgos agradezco a los Profesores Dres. HERZOG y PAUL EN JENA.

(7) Compárese el artículo del autor, *Wirtschaftsgeographie Südpatagoniens, Territorio de Magallanes*, en Petermanns geographische Mitteilungen, 1933, pág. 9 y 73.

SOBRE VARIOS RESTOS DE OSOS DE LA FAUNA ENSENADENSE

Por CARLOS RUSCONI

I

Los arrecifes del río de la Plata, especialmente aquellos que se encuentran frente a las estaciones Olivos - Anchorena, han sido recorridos por numerosos investigadores y coleccionistas, y gracias a los cuales se ha podido llegar a conocer de esos terrenos, una variada fauna de mamíferos, aves, reptiles, etc., en su casi totalidad extinguidos. La existencia de grandes osos tampoco era desconocida puesto que Bravard los coleccionó hace tres cuartos de siglo, pero en cambio, los de pequeña talla habían quedado ignorados hasta hace poco en la región citada ⁽¹⁾ como así también en el mismo nivel de otros lugares del país. Por eso he creído útil ocuparme aquí: 1º, de una tibia completa de un pequeño oso del piso ensenadense; 2º, de otro trozo tibial, también de pequeña talla, procedente de Miramar; y 3º, de un astrágalo de un gran oso del piso ensenadense.

II

Sobre los osos extinguidos se han ocupado muchos autores: Bravard, Burmeister, Gervais, los hermanos Ameghino, Kraglievich, Rusconi, etc. Los géneros mejor conocidos son *Arctotherium* y *Pararctotherium*, siendo más problemáticos *Proarctotherium* y *Chapalmalania*. Las especies del primer género son todas de gran talla; *A. latidens*, *A. Candiottii*, *A. bonaerense*, mientras que tienen tamaño mediano las de *Paractotherium*.

(1) Con excepción del dato de AMEGHINO, quien, en 1909, p. 122, citó a *Pararctotherium enectum* en la fauna ensenadense. Los argumentos de que se valió este sabio los ignoro.

El genotipo de *Paractotherium enectum* fué fundado por F. Ameghino en 1904, p. 120, sobre una mandíbula procedente de la parte inferior del piso bonaerense de las ciudad de Buenos Aires. En la página siguiente nuestro sabio dió a conocer su especie *P. pamparum*, refiriendo a ésta una mandíbula que, años después fué utilizada por Kraglievich (1928, p. 38), como tipo de un subgénero y especie nueva que denominó (*Pseudarctotherium debilis*). Finalmente en uno de sus trabajos póstumos (1934, p. 69), este último autor dió a conocer una nueva subespecie (*Paractotherium pamparum crassidens*), procedente del pampeano superior de Quequén Salado. En esta publicación Kraglievich manifestó que *Pseudarctotherium* no había sido hallado en la fauna ensenadense, pero en base a las noticias que doy más abajo no me es posible ya compartir de esa opinión.

Arctotherium (Pseudarctotherium) debilis Kragl.

Se trata de una tibia completa del lado derecho, n° 771 de la col. Paleontológica Rusconi, recogida por mí sobre los arrecifes del río de la Plata, y al norte de la estación J. B. Anchorena, piso ensenadense, plioceno superior.

Su magnitud es comparable a la tibia de un oso pardo (*Ursus arctos*) hembra pero se distingue por su notable robustez y por otros detalles anatómicos (fig. 1 a, b y c).

La superficie articular proximal muestra más o menos las mismas características de las del oso pardo con la diferencia de que la carilla que articula con el cóndilo interno del fémur es menos cóncava transversalmente que la del oso actual mencionado. Los bordes posteroexterno y posterointerno del tercio superior de la diáfisis son mucho más robustos pero este último margen, o sea donde se inserta el músculo poplíteo, resulta ser muy redondeado y dispuesto en un plano más atrás que en el de la especie actual, de tal modo que, vista la diáfisis en sección transversa y a unos 5 centímetros debajo de la superficie proximal, se advierte que la del fósil describe la figura de un triángulo obtuso y de un triángulo isosceles en la del oso pardo. Entre ambos márgenes laterales se observa un gran surco situado en el tercio superior que es muy profundo, más amplio y colocado sobre el eje de la tibia, mientras que en *U. arctos* no es tan amplio y además se halla algo desplazado hacia el lado externo.

La carilla distal es mucho más amplia que la de *U. arctos*. Comparada con la de *Tremarctotherium californicum* ilustrada por Me-

rriam y Stock en 1925 (lám. X, fig. 1 b) resulta ser también algo más ancha con la diferencia de que el labio externo de esta superficie, o peroneal, es menos puntiagudo.

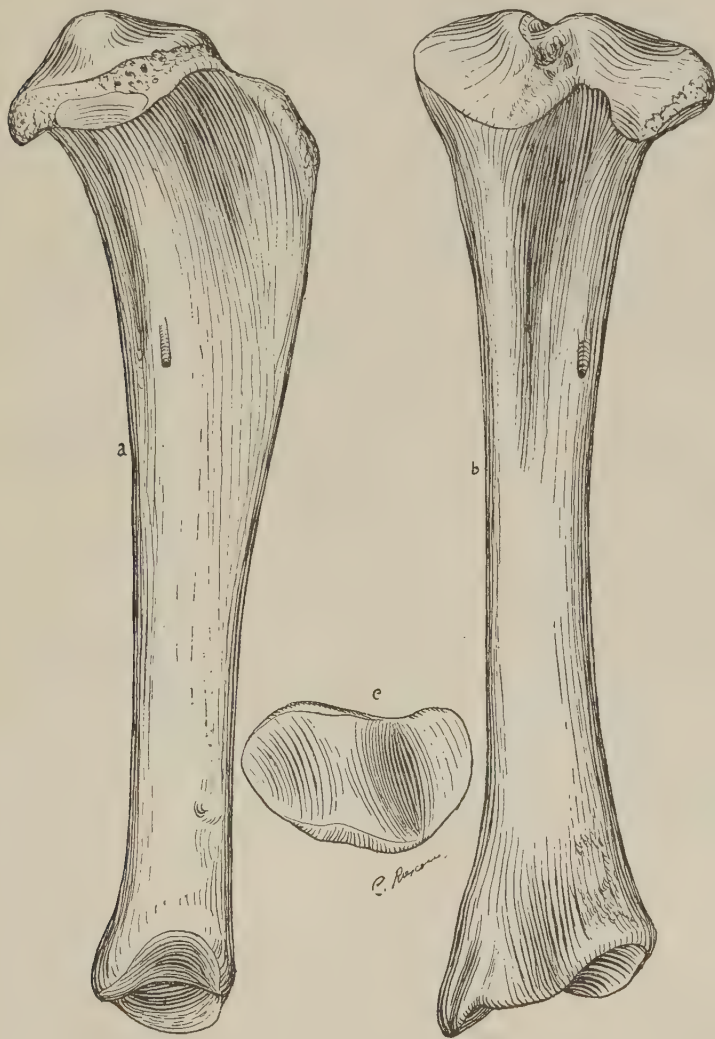


FIG. 1. — Tibia del lado derecho de *Arcotherium* (*P.*) *debilis* Kragl. Vista por el lado externo, atrás y de abajo, reducida a la mitad ($\frac{1}{2}$).

Por relación a la longitud craneana y otros pormenores se sabía que *Pararcotherium* es un género de mediano tamaño y más o menos como *Pseudarcotherium*. Ahora los nuevos restos vienen a co-

rrorborar esa opinión; pues, la distancia de los incisivos hasta el cóndilo occipital de *Pararctotherium pamparum*, según Ameghino, es de 320 y de 200 el ancho bicigomático; un cráneo de *Ursus arctos* hembra de mi colección zoológica, mide 320 y 190 respectivamente. La tibia de este mismo animal mide 280 y la pieza fósil N° 771 tiene tan sólo 275 milímetros de longitud, o sea un poco más pequeña todavía.

El descubrimiento inesperado de esta tibia de reducidas proporciones en un lugar donde se encuentran comunmente despojos fósiles del piso ensenadense y justificada además por su fosilización idéntica a la de los huesos que se extraen de los arrecifes del río de la Plata, necesariamente, renovará la contravertida discusión acerca de la posición estratigráfica de los pequeños osos en sedimentos de este nivel geológico, que como *Pseudarctotherium* constituía hasta hace poco, un caso desconocido en la fauna ensenadense. De mi parte estoy dispuesto a creer con mayor seguridad en la presencia de ese subgénero dentro del nivel inferior de la formación pampeana y no en la existencia del género *Pararctotherium*. Claro que esta opinión nada favorece a la vertida por el señor Cabrera, quien sostuvo la tesis de que *Pararctotherium* habría sido fundado con un ejemplar hembra y *Arctotherium* sobre un resto de distinto sexo, lo que venía de ese modo a anular el primer género de Ameghino. Poco tiempo después (1932, p. 97), expresé mi disconformidad al respecto y ahora observo en un trabajo póstumo de Kraglievich (1934), que al exponer este autor mejores argumentos viene a poner término a este asunto, al demostrar que *Arctotherium* es genéricamente distinto de *Paractotherium*, precisamente como lo han creído así los hermanos Ameghino, Kraglievich, Castellanos, Matthew, Parodi, Rusconi y otros autores.

III

En una de sus recientes excursiones por Miramar, el señor L. J. Parodi ha podido descubrir un resto tibial de otro pequeño oso en la parte superior de la barranca situada entre el Durazno y el Cañadón y en un terreno con ciertas características del chapadmalense.

La tibia corresponde a la parte distal y tiene aproximadamente el mismo volumen que la de *Arctotherium* (*Pseud.*) *debilis*, lo que me hace presumir que el hueso en estado completo debió alcanzar una magnitud parecida o un poco mayor. El maléolo tibial es levemente más robusto y son más excavados los surcos por los cuales pasan el

tibial posterior y el flexor común de los dedos del pie. Este último canal está limitado por una cresta elevada y entre ésta y el borde externo de la tibia se advierte una amplia depresión central que representa la corredera para el flexor propio del dedo grueso.

También es un poco más robusta en sentido anteroposterior y la cresta central de la superficie articular astragalo-tibial es algo más oblicua que en la tibia de *Pseudarctotherium debilis* del ensenadense. Por las pocas diferencias anotadas y unidas además a la magnitud casi igual al mismo hueso antes mencionado, me inclino a creer que esta pieza debió pertenecer mucho más al subgénero *Pseudarctotherium* que a *Chapalmalania*. Esta última forma, muy deficientemente conocida, ha sido fundada por Ameghino con una porción de premaxilar provista de cuatro dientes incisivos que, según las esquetas noticias dadas por ese paleontólogo y la ilustración ofrecida por Rovereto en 1914, indican a todas luces la presencia de un animal de gran talla comparable al de las grandes especies de *Arctotherium*.

	<i>Arctotherium (Pseud.) ? debilis Kragl. (nº 771 col. Rusconi)</i>	<i>Tremarctotherium sinum (según Merriam y Stock, 1925)</i>	<i>T. californicum (según M. y Stock, 1925)</i>	<i>Arctotherium bonariense (según P. Gervais)</i>	<i>Ursus spelaeus (según P. Gervais)</i>	<i>Ursus arctos ♀ (nº 327, col. Rusconi)</i>
Longitud total de la tibia medida por el lado externo	275	387,6	404	320	310	280
Ancho máximo de la extremidad proximal	82	110,1	110,7	—	—	74
Diámetro transverso en la mitad de la diáfisis	29	37	40,7	—	—	23
Diámetro ant. post. de la diáfisis . .	32	41,8	41,6	—	—	27
» máximo distal	58	85,6	88,4	—	—	52
» máximo ant. post. distal	37	51	52	—	—	34

IV

Arctotherium? latidens Brav.

Los astrágalos de los grandes osos son también escasos y en el Museo de Buenos Aires recuerdo haber visto varios de ellos de distintos tamaños que no han sido debidamente estudiados, y menos puedo hacerlo ahora por motivos conocidos.

El primer autor que describió e ilustró el astrágalo fósil de un supuesto oso fué P. Gervais en 1855 (vol. II, p. 9), lám. IV, fig. 2). Dicho investigador dijo que ese hueso era más robusto que el del oso pardo y se diferenciaba además por diversos otros caracteres anatómicos. Años después (1864), vol. I, p. 145), Burmeister sostuvo que el mencionado astrágalo y los cuatro metápodos referidos por Gervais a un oso (*Ursus bonariensis*) pertenecieron, por el contrario, a *Smilodon*, o sea al *Machaerodus* de Burmeister. Ameghino, en 1904 (p. 448) ratificó en un todo la observación de Burmeister con respecto al astrágalo y a la cual también me suscribo en vista de que el dibujo de este último hueso dado por Gervais no deja lugar a duda de su similitud con el de los grandes tigres extinguidos de América.

Ameghino es pues quien por primera vez, se ocupó con atención del astrágalo de uno de nuestros grandes osos procedentes del ensenadense y que refirió a *Arctotherium bonaerense*. Ahora bien, como en la colección del señor Hennig se conservan varios restos de estos animales y entre ellos un lindo astrágalo que difiere algo del figurado por Ameghino en 1904, es por eso que daré las características principales de dicha pieza y que referiré provisoriamente a *Arctotherium latidens* Brav.

La pieza de la colección de Hennig procede del piso ensenadense y recogida sobre los arrecifes del río de la Plata, tal vez al norte de la estación Anchorena; su tamaño es comparable al de *A. bonaerense*.

Vista superior. — La superficie articular de la cabeza astragalar de *A. latidens* (fig. 2a y b), se extiende mucho más arriba originando de ese modo un cuello más corto. En la mitad de la longitud del borde interno del astrágalo se advierte una profunda entrada o muesca que coincide con la superficie más excavada de la faceta sus-

tentacular, mientras que en *A. bonaerense* (fig. 3 a y b) no existe dicho detalle o es poco aparente. El labio externo de la tróclea muestra una superficie plana en sentido transversal como en *Ursus arctos*, pero el dibujo de *A. bonaerense* indica la presencia de una suave corredera secundaria que da origen a una superficie algo sinuosa

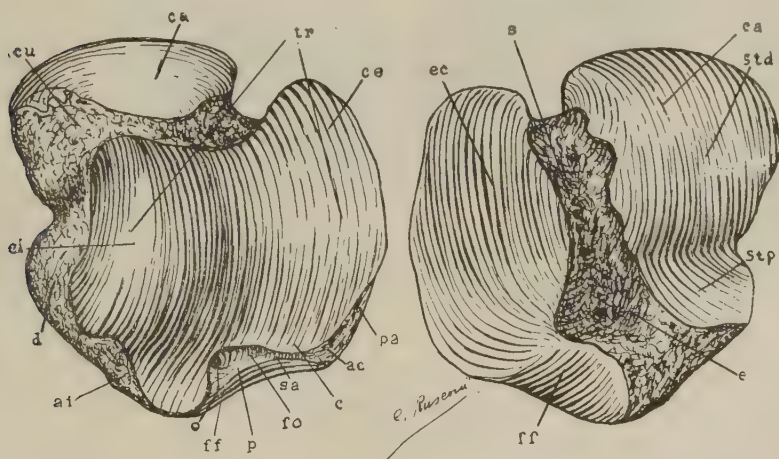


FIG. 2. — Astrágalo del lado derecho de *Arctotherium latidens* Brav.: a) visto por arriba, y b), visto por abajo, a la mitad del natural ($1/2$).

- ac. — Tuberosidad de la inserción del ligamento astrágalo-calcalear posterior.
- ai. — Tuberosidad para la inserción del ligamento astrágalo calcaneal interno.
- c. — Línea indicando el límite posterior de la superficie articular tibio-calcalear.
- ca. — Cabeza del astrágalo.
- ce. — Cóndilo externo de la tróclea articular.
- ci. — Cóndilo interno de la tróclea articular.
- cu. — Cuello del astrágalo.
- d. — Superficie de inserción del ligamento deltoides.
- e. — Entrada posterior o proximal del surco del seno del tarso.
- ec. — Faceta ectal.
- ff. — Nueva corredera del flexor del dedo grueso.
- fo. — Fosa ligamental.
- p. — Puente.
- pa. — Superficie de inserción del ligamento penoneo-astragaliano posterior.
- s. — Surco del seno del tarso en el que se aloja el ligamento interóseo.
- sa. — Surco arterial.
- std. — Faceta sustentacular distal.
- stp. — Faceta sustentacular proximal.
- tr. — Tróclea articular tibio-astragaliana.
- U. — Perforación vascular para la nutrición del astrágalo.

en sentido transversal. El labio externo troclear de este hueso finaliza hacia adelante en una línea de frente plano y no puntiaguda como en *A. latidens*. Igualmente se advierte una pequeña diferencia

en la parte posterior de la corredera que en esta última especie termina hacia atrás formando un labio muy destacado.

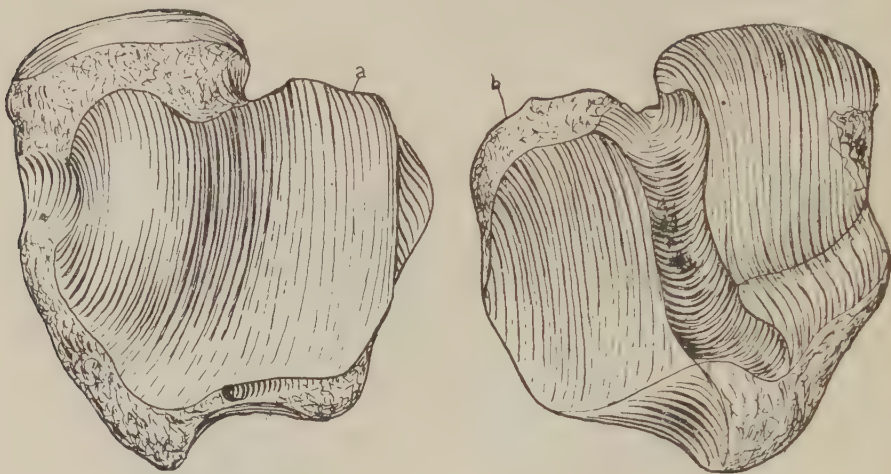


FIG. 3. — Astrágalo del lado derecho de *Arctotherium bonaerense* Gervais: a) visto por arriba, y b) visto por abajo, a dos tercios del natural ($\frac{2}{3}$).

Vista inferior. — Hay pocas diferencias entre la faceta ectal de *A. bonaerense* y la de *A. latidens*; sin embargo, en esta última forma se ve una superficie convexa situada en el margen posterointerno de dicha carilla, o sea, en el borde que limita con la corredera suplementaria (f. f.). En la pieza ilustrada por Ameghino no se descubre ese detalle e ignoro si la pieza lo poseía o es simplemente un defecto del dibujo. Lo restante de la faceta ectal de *A. latidens* es de superficie cóncava en sentido anteroposterior y casi plana transversalmente, como en *U. arctos*, con la diferencia de que la de este último animal muestra una excavación más pronunciada lateralmente.

La faceta sustentacular aparece dispuesta en dos planos: la sección anterior y la más amplia, muestra en general una superficie convexa anteroposteriormente y casi plana en sentido transversal, sobre todo en aquella región que está en contacto con el calcáneo. Dicha faceta preséntase limitada anteriormente por un surco que desde el lado interno del astrágalo se dirige oblicuamente hacia adelante y adentro; la porción más avanzada de esta línea corresponde a la faceta propia de la cabeza astragalar. Ambas facetas forman una sola carilla en su margen interno o límite con el surco del seno

del tarso, pero en *U. arctos* (fig. 4 a y b) aparecen interrumpidas debido a la existencia de una amplia depresión destinada a inserciones musculares. La segunda sección de la faceta sustentacular es pequeña y muestra una superficie suavemente excavada, casi plana.

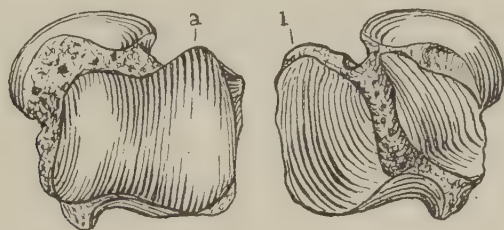


FIG. 4. — Astrágalo del lado derecho de *Ursus arctos*: a) visto por arriba, y b), visto por abajo, a dos tercios del natural (2/3).

El *sulcus tali* tiene mucha profundidad, siendo de superficie rugosa y en su tercio posterior se advierten algunas perforaciones que comunican con la masa ósea del hueso.

Vista posterior. — Lo primero que se destaca es la carilla (f.f.) por la cual corre el tendón del músculo flexor del dedo grueso. Dicha carilla es convexa de arriba abajo y cóncava lateralmente como en *A. bonaerense*, pero la de *Ursus arctos* resulta ser muy profunda y también bastante más angosta proporcionalmente al volumen de ambos astrágalos. Entre el margen superior de esta carilla y el borde posterior de la corredera troclear aparece el agujero astragalar que tiene 2 milímetros de diámetro y tan sólo de un milímetro en el oso actual mencionado. El margen interno, o sea el que mira hacia el eje del esqueleto, de la mencionada carilla forma con el borde interno del astrágalo un triángulo de línea más recta y cuyo vértice aparece en un punto que coincide con el eje central de la corredera troclear, pero en *U. arctos* dicho vértice se encuentra mucho más desplazado sobre el labio troclear interno.

Vista lateral externa. — La faceta que articula con el peroné muestra una disposición parecida a la del oso actual con la única diferencia de que en la del fósil resulta ser más corta y menos alta en proporción al volumen astragalar.

Referente a la tibia n° 771, estoy dispuesto a considerarla como *Arctotherium* (*Pseudartotherium*) *debilis* Kragl., y en consecuencia,

es el primer vestigio positivo de osos extinguidos de pequeño tamaño que se descubren en niveles inferiores de la formación pampeana, correspondiente al plioceno superior, tal como lo he colocado en un reciente trabajo (1927, p. 354). En cuanto al fragmento tibial N° 455 procedente de Miramar, lo refiero con mucha duda a la mencionada especie en vista de las pequeñas diferencias anatómicas observadas y además por la inseguridad del piso geológico en que ha sido hallado; pues por el aspecto de la fosilización y de otros antecedentes que poseo, parecen indicar que el terreno que lo contenía corresponde a la parte superior del chapadmalense. En caso contrario, el resto en cuestión debe tener una antigüedad ensenadense. Con respecto al astrálogo, supongo que se trata de la especie *Arctotherium latidens*, por lo menos me parece distinto al otro astrángalo que Ameghino describió como *A. bonaerense*. Bien pudiera ocurrir también un caso inverso, es decir que el hueso en cuestión descripto por mí correspondiera a la especie descripta por Gervais y a la especie *latidens* la mencionada por Ameghino, en vista de que las piezas tipos están basadas sobre otros huesos del esqueleto y además por el insuficiente material conocido hasta ahora.

Medidas del astrágalo	<i>Arctotherium</i> L. <i>Latidens</i> Brav.	<i>Ursus arctos</i> n° 327, col. Rusconi
Diámetro anteroposterior máximo	84	38
» transverso máximo	83	42
» » de la cabeza	51	29
Distancia entre ambos lados externos de la tróclea .	64	33

BIBLIOGRAFÍA

- AMEGHINO, F., *Nuevas especies de mamíferos, cretáceos y terciarios de la República Argentina*, en *Anales de la Soc. Científica Argentina*, pp. 1-142 del separado, Buenos Aires, 1904.
- AMEGHINO, F., *La perforación astragaliana en los mamíferos no es un carácter originariamente primitivo*, en *Anales del Museo de Hist. Natural*, vol. XI, pp. 349-460, Buenos Aires, 1904.
- GERVAIS, P., *Recherches sur les mamifères fossiles de l'Amérique Méridionale*, en *Expédition dans les parties Centrales de l'Amérique du Sud*, vol. II, París, 1855.
- BURMEISTER, G., *Anales del Museo Público*, vol. I, 1864.
- KRAGLIEVICH, L., *Los artoterios norteamericanos (Tremarctotherium, n. gen.) en*

- relación con los de Sud América, en *Anales del Museo de Hist. Natural*, vol. XXXIV, pp. 1-16, Buenos Aires, 1926.
- KRAGLIEVICH, L., *Contribución al conocimiento de los grandes cánidos extinguidos de Sud América*, en *Anales de la Soc. Científica Argentina*, vol. CVI, pp. 1-46 del separado, Buenos Aires, 1928.
- MERRIAM, J. C., y CHESTER STOCK, *Relationships of the Short-faced Bear, Arctotherium, from the pleistocene of California*, en *Contributions to Paleontology from the Carnegie Inst.*, pp. 1-35, Wáshington, 1925.
- RUSCONI, C., *Sobre un húmero de Arctotherium y otro de Felis de la formación pampeana*, en *Anal. Mus. Hist. Natural*, vol. XXXIV, pp. 279-297, Buenos Aires, 1927.
- RUSCONI, C., *Sobre una mandíbula de Arctotherium descubierta en las excavaciones del subterráneo Lacroze*, en *Rev. de Medicina y Veterinaria*, vols. XV-XIX, pp. 93-98, Buenos Aires, 1932.
- RUSCONI, C., *La vida animal a fines del terciario superior de Buenos Aires*, en *El Monitor de la Educación Común*, vol. LII, pp. 3-65, Buenos Aires, 1933.
- RUSCONI, C., *Contribución al conocimiento de la geología de la ciudad de Buenos Aires y sus alrededores y referencia de su fauna*, en *Actas de la Academia de Ciencias en Córdoba*, vol. X, pp. 177-384, Buenos Aires, 1937.

BIBLIOGRAFIA

Actualités Scientifiques et Industrielles. — Folletos 16 ½ cm. × 25 ½ cm.) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos remitidos a la Academia Nacional de Ciencias.

Nº 555. — HUSSON (RAOUL), *Principes de Metrologie Psychologique.* 82 páginas, 20 francos. 1937.

Fascículo I de la serie «Psychologie Appliquée», dirigida por J. M. Lahy, director de Estudios en la «Ecole Pratique des Hautes Etudes» y en la Universidad de París. Ha escrito el prefacio de este trabajo cuyo autor, ex alumno de la Escuela Normal Superior, es también asistente de psicología aplicada en la Escuela nombrada más arriba y, además, Secretario general de la Estadística General de Francia.

En una Introducción se expone cómo ha nacido la medida en psicología; después trata lo relativo a métodos e instrumentos psicométricos; las etapas metrologógicas de una operación de medida; las fuentes de error en psicometría; la graduación de los instrumentos psicométricos; las cualidades metrologógicas de los instrumentos psicométricos; la justeza de dichos instrumentos y la validez de una medida; una bibliografía termina el libro.

El profesor Lahy, en el prefacio, observa que el autor ha querido precaveros contra los peligrosos errores de la metrología insuficientemente precisa; y sobre todo, prepáralos para la ciencia de las medidas psicológicas. Husson posee las cualidades de un excelente experimentador y es ducho en el manejo del instrumento matemático aplicable al caso.

Nº 556. — GAUTIER (M. Y A.), *Recherches dans la serie de La Pyridone. Etude de quelques α — Pyridones.* 78 páginas, 18 francos. 1937.

El autor de este trabajo — doctor en ciencias físicas y farmacéutico jefe de los Asilos del Sena — expone aquí el resultado de las investigaciones que ha realizado relativamente al tema que indica, o sea, en la serie de la piridina. En un apéndice trae sus investigaciones relativas a la acción fisiológica de algunos α — piridonas.

Nº 557-558. — BORDAS (JEAN), *Le Soja et Son Role Alimentaire*; MANGOLD (M.), *L'Utilisation alimentaire de la Cellulose*. Folletos de 40 páginas; 8 francos cada uno. 1937.

Son los fascículos III y IV de la serie « Nutrition » dirigida por Emilio F. Terroime.

Bordas es director de la Estación de Agronomía y de patología vegetal de Avignon; Mangold es profesor en la Universidad de Berlín y director del Instituto de Nutrición animal en esta ciudad.

El primero se ocupa de la *soja hispida*, planta cultivada, quizá la más antigua, en Asia Oriental. Desde 4000 años la utilizan los chinos, y para varios centenares de millones de estos asiáticos, constituye, con el arroz, el alimento principal. Es una de aquellas plantas a las que, a la vez que se les acuerda o se reconoce cierto valor, sin embargo, hay resistencia en utilizarlas. El autor expone aquí sus caracteres botánicos y sus principales variedades; su química, su fisiología alimenticia y empleo nutritivo; sus diversos usos y su economía. Formula conclusiones favorables a su empleo y trae una bibliografía.

El profesor Mangold, por su parte, observa que la celulosa es, entre todas las sustancias orgánicas, la que existe o se halla en la superficie de la tierra en mayores proporciones, siendo un elemento fundamental de la estructura de los organismos vegetales. Después de varias consideraciones generales sobre el particular, estudia sus elementos químicos; el poder digestivo de la celulosa bruta y de la pura, en general, y en el organismo humano; su valor energético, y la digestión artificial de las celulosas de la paja y de la madera. Una bibliografía termina el folleto.

Nº 559-560. — GUILLEMET (RAYMOND), *Le Problème du Pain*. Dos folletos, respectivamente, de 62 y 102 páginas, con figuras y láminas; 12 y 20 francos. 1937.

Fascículos V y VI de la serie « Nutrition » dirigida por Emilio F. Terroime, profesor de la Facultad de Ciencias de Estrasburgo; director del Instituto de Fisiología general. El autor es doctor en física y jefe de trabajos en el Instituto de Química Biológica de la Facultad de aquella ciudad.

El primero trata todos los métodos de apreciación del valor de las harinas y de los trigos a los efectos de la elaboración del pan. El otro trata la fermentación para la panificación.

En el primer folleto se estudia o trata sucesivamente el ensayo del laboratorio relativo a la panificación y las técnicas y los aparatos para la apreciación de las calidades mecánicas de las pastas y glútenes de harina de trigo; la medición de las características fermentatorias de dichas pastas y glútenes; los ensayos de trigo entero molido para la determinación del valor panadero de la harina; la investigación de las relaciones entre medidas químicas o fisicoquímicas y el valor panadero. Las conclusiones de este folleto son: que mientras se pueda hacer algo más perfecto, las calidades mecánicas de los glútenes y de las pastas, deben establecerse utilizando con tino y espíritu crítico, los téncas y los aparatos contruídos con tal propósito.

En el segundo folleto encontramos una Introducción seguida de los siguientes temas: Datos del problema (fermentación); la fermentación alcohólica y la producción de gases en el seno de la pasta; las características plásticas de la pasta y su evolución; la evolución química y la físico-química en la pasta; la marcha general de la fermentación de la panificación. Las conclusiones son que, a medida que los métodos de la ciencia moderna penetran el problema de la panificación, se derrumban prejuicios ancestrales y se esfuma el misterio de las virtudes magnas de las panificaciones de antaño.

Nº 561. — GOUIN (RAOUL), *La Consideration du poids vif dans les études d'alimentation*. 24 páginas, 7 francos.

Fascículo VII de la serie « Nutrición » mencionada.

El autor es ingeniero agrónomo, miembro correspondiente de la Academia de Agricultura y del Consejo Superior de la cría. En una Introducción indica que su objeto es precisar el valor de las informaciones que pueden sacarse de la consideración del peso vivo de los sujetos, en los estudios de la alimentación, tanto en base a los datos antiguos, como en el examen de las recientes adquisiciones experimentales. Había de las experiencias de Andrés Gouin y Andouard; del concurso de cerdos gordos en la feria de Milán en 1931; de las experiencias del Instituto experimental zootécnico de Roma y del centro de experimentos de Metz. Formula las Conclusiones que de todo ello se desprende; declara que hasta conquistar nuevos progresos, hay que renunciar a establecer fórmulas exactas de racionamiento, como algunos zootécnicos tuvieron la pretensión de hacerlo; pero que, en la práctica, se consiguen aproximaciones útiles.

C. C. D.

Reportaire international des Centres de Documentation chimique. París. 1935.

En un volumen de 116 páginas, la Oficina Internacional de Química que funciona en París bajo la dirección de Jean Gerard, ha publicado una interesante recopilación de informaciones relativas a todos los Centros, Sociedades, Instituciones, etc., que en todas las naciones cultas, se ocupan de reunir, centralizar y sistematizar documentos, publicaciones y diversas clases de estudios relacionados con la ciencia química, tanto teórica como aplicada.

La utilidad para los investigadores y bibliógrafos de disponer de un repertorio de esa clase, es bien evidente, pues los centros de documentación elegidos, representan oficinas mediante las cuales cualquier interesado en la averiguación de un dato, puede ponerse en comunicación con los archivos, bibliotecas, museos, cinematecas, hemerotecas, etc., de cada país.

Las referencias y explicaciones de esta obra, están en francés, inglés o alemán. Para la Argentina, se indica la existencia como centro de documentación química de la *Asociación Química Argentina*, haciéndose referencia también a sus publicaciones: *Anales*, *Bibliografía Química Argentina* y *Catálogo de Revistas*.

E. R.